Московская сельскохозяйственная академия
им. К.А. Тимирязева

Кафедра экономической кибернетики

Н.М. Светлов

СТОИМОСТЬ
в экономических системах

Учебное пособие для студентов экономических специальностей

Издание второе, переработанное

МОСКВА Издательство МСХА 2000

УДК 330.133/.138:63.001
ББК 65.011.3-86
С-

В учебном пособии при посредстве системы микроэкономических моделей рассмотрены процессы образования стоимости, функции стоимости в рыночной экономике, связь стоимости с предпочтениями хозяйствующих субъектов и технологическими детерминантами. Предназначено для студентов специальности «Математические методы и исследование операций в экономике», изучающих курс «Модели ценообразования в рыночной экономике».

Рецензенты: профессор **А.С. Иванов**,
чл.-корр. РАСХН, профессор **А.М. Гатаулин**.

Рекомендовано к изданию методической комиссией экономического факультета.

Протокол №7 от 3 ноября 1999 г.

Председатель методической комиссии экономического факультета профессор **А.В. Чернышов**.

ISBN

Предисловие

Учебное пособие ориентировано на студентов экономических факультетов, изучающих курс «Модели ценообразования в рыночной экономике». Оно окажется полезным также любому студенту, изучающему экономическую теорию и стремящемуся составить представление о степени изученности проблем стоимости и цены, теоретическом и методологическом арсенале, используемом современной наукой для их решения. Пособие может заинтересовать также опытного специалиста, желающего обновить свой теоретический багаж и нуждающегося в путеводителе по обширной литературе, посвящённой данным проблемам.

Цели пособия следующие:

- ознакомить читателя с основными классами математических моделей экономических систем и полученными с их помощью выводами относительно сущностных свойств стоимости и цен;
- выявить преемственность и взаимосвязь моделей экономических систем и полученных на их основе выводов.

В пособии читатель найдёт ответ на вопросы:

- какова связь стоимости с эффектом, приносимым данным благом хозяйствующему субъекту — предприятию, индивидууму, органу хозяйственного управления;
- почему эффекты от использования различных благ любым хозяйствующим субъектом оказываются пропорциональными;
- какова связь стоимости благ с технологиями, присущими данной экономике.

Актуальность пособия обусловлена тем, что глубокое понимание сущности стоимости необходимо каждому специалисту, принимающему ответственные экономические решения на любом уровне управления и бизнеса. Без всестороннего системного представления о стоимости невозможно правильно интерпретировать информацию о ценах, поступающую из разнородных, часто весьма специфических источников, понять смысл числовой экономико-математической модели, обоснованно выбрать критерий для её решения, сбалансировать разнообразные и многочисленные интересы граждан, предприятий, учреждений, общественных организаций и социальных слоёв.

Обычно, стремясь познакомить читателя с разнообразными ветвями теории стоимости, авторы учебников и пособий рассматривают различные модели одной и той же экономической реальности, делая упор на специфику моделей, их смысла и, как следствие, экономически значимых свойств их математических структур. При таком подходе из поля зрения читателя иногда исчезает категория стоимости, связывающая все микроэкономические модели[1] общим содержанием независимо от их специфики. В данном пособии делается попытка указать читателю на то общее, что присуще всем микроэкономическим моделям и что позволяет им, вне зависимости от методических различий, оперировать одной и той же категорией стоимости, фундаментальное содержание которой остаётся неизменным во всех этих моделях.

Для работы с пособием необходимо знание экономической теории и политической экономии в объёме курсов экономических факультетов вузов, твёрдое понимание сущности стоимости, её экономического и социального значения. Это требуется для того, чтобы читатель сосредоточился на механизмах воплощения закона стоимости в пропорциях обмена и закономерных свойствах этих пропорций, выявленных посредством математического анализа моделей экономических систем.

Пособие построено таким образом, чтобы требования с его стороны к математической подготовке студентов были минимальными. Формальная теория изучаемых моделей в пособии не рассматривается, ей посвящено много замечательных учебников и монографий. Для освоения рассматриваемого материала достаточно овладеть курсом

---

[1] Микроэкономика отличается от макроэкономики не объектами исследования, а методами. Стоимость, вне всякого сомнения, невозможно объяснить, рассматривая фирму или другой объект, отличный от народного хозяйства в целом. При этом необходимо использовать микроэкономические методы, поскольку макроэкономика оперирует только с агрегированными характеристиками народного хозяйства (равно как и других экономических систем), в которых исчезают отдельные блага вместе с присущей им стоимостью.

высшей математики гуманитарного вуза и, сверх того, иметь элементарные представления об операциях над матрицами и о теории математического программирования (постановка и методы решения общей задачи математического программирования и задачи линейного программирования). Предполагается также, что читатель знаком с понятиями системы, динамической системы и экономической системы, свойствами систем и методом моделирования.

Мелким шрифтом в пособии выделен не факультативный материал, а текст, который рекомендуется пропускать при первом прочтении. Он касается вопросов существенных, но требующих более широкого взгляда на предметную область, чем остальной материал. Часто замечания, выделенные мелким шрифтом, могут подсказать интересную тему для обсуждения на семинаре и поэтому особенно полезны любознательному, инициативному студенту.

При подготовке второго издания на основе опыта использования пособия в учебном процессе полностью переработана структура, обновлено содержание параграфов, посвящённых магистральной теории, исправлен ряд неточностей и опечаток, учтены многие замечания, сделанные читателями — специалистами и студентами. Автор с благодарностью примет новые замечания и пожелания по совершенствованию пособия.

Глава 1. Основы методологии изучения стоимости

1.1. Краткий обзор теорий стоимости

Главный вопрос теории стоимости, первые попытки решить который делал ещё Аристотель, — *чем определяются количественные значения цен.*

Другой вопрос, поставленный в конце прошлого века Л. Вальрасом, — *возможно ли в реальной экономической системе существование равновесных цен*, обеспечивающих без какого-либо дополнительного вмешательства согласованное распределение ресурсов между индивидуальными хозяйствующими субъектами, принимающими решение независимо друг от друга, чтобы каждый хозяйствующий субъект приобрёл каждого ресурса столько, сколько хочет (в пределах, допускаемых его бюджетом), и при этом все дефицитные ресурсы использовались бы без остатка; если да, то всегда или при выполнении каких-то условий. Такая постановка вопроса отражает идею проверки принципиальной возможности существования механизма «невидимой руки», основанного на регулировании посредством цен.

Третий актуальный вопрос — *в каком соотношении находятся стоимость, равновесные цены и цены фактически заключённых сделок.*

Существует также масса более частных вопросов, касающихся проблемы стоимости: природа денег, сущность процента на капитал, экономического роста, стоимостных критериев оптимальности. Теория стоимости участвует и в решении проблем эффективности и справедливости распределения благ.

Решение этих вопросов — главная цель микроэкономических моделей, рассматриваемых в пособии.

Терминология

Предмет книги — причина, обусловливающая цены (пропорции обмена экономических благ), — известен под разными наименованиями.

В отечественной литературе используется термин «*стоимость*», которым мы обязаны классическому переводу «Капитала» Маркса, принадлежащему И.И. Скворцову-Степанову. Этот термин подчёркивает, что стоимость — величина общественно необходимых затрат труда на производство единицы блага — это то, сколько стоит данное благо обществу.

В современной англоязычной литературе для обозначения причины цен используется термин «*ценность*» (value), акцентирующий субъективную сторону причины цен — представление общества или индивидуума о ценности (значимости) данного блага.

Термин «*цена*» (price) в англоязычной и переводной литературе означает как цены, фактически наблюдаемые на рынке, так и их причину. Если из контекста не ясно, о чём именно идёт речь, используются сочетания «равновесные цены» (equilibrium prices), «цены совершенного рынка» (fair market prices), под которыми понимается причина цен, и «рыночные цены» (market prices), означающие пропорции обмена, величина которых обусловлена влиянием случайных, преходящих, субъективных факторов наряду с факторами объективными, присущими экономической системе.

Для обозначения причины цен мы будем пользоваться термином «стоимость» вне зависимости от того, какой термин использован авторами первоисточников изучаемых тем. Термин «цена» употребляется только в собственном смысле, означая количественную характеристику сделок — пропорцию обмена одного блага на другое, обычно на деньги[1].

Стоимость характеризует *благо* независимо от того, является ли оно товаром, и означает потенциальную способность воплотиться в цену, если благо станет товаром. Цена является характеристикой не блага, а *сделки*.

---

[1] У Маркса термин «цена» используется исключительно для обозначения денежного выражения стоимости. Форму, которую стоимость приобретает при обмене в общем случае, в т.ч. без посредства денег, в переводе «Капитала» и других отечественных публикациях называют меновой стоимостью.

Термины «*благо*», «*экономическое благо*» представляют некоторую сложность, поскольку в пособии они ставятся в соответствие переменным экономических моделей. Как следствие, их смысл зависит от интерпретации моделей и может отличаться от принятого в учебниках экономической теории (хотя часто различие касается лишь степени агрегирования). Во всяком случае, эти термины приписываются только тем переменным, для которых могут быть указаны условия, при которых их влияние на функцию предпочтения исследуемой системы ненулевое; т.е. переменные, отражающие какую-либо реальность, небезразличную (в известных условиях) моделируемой системе.

По отношению к системе благо может быть *продуктом*, если оно в ней возникает (создаётся, производится), и *ресурсом*, если оно в ней потребляется.

Для обозначения величины оценки известного количества блага (благ) в заданных ценах, т.е. произведения количества блага на цену или суммы таких произведений, будем использовать термин «*совокупная стоимость*» вне зависимости от того, совпадают используемые для оценки цены со стоимостью или нет. То же касается терминов «стоимость совокупного спроса», «стоимость совокупного предложения», «стоимость совокупного избыточного предложения».

Предыстория теорий стоимости

Первое достоверно известное исследование проблемы стоимости принадлежит Аристотелю. Великий древнегреческий учёный был убеждён в существовании причин пропорций обмена, носящих общественный характер. Он пишет, что продукт сапожника должен так относиться к продукту земледельца, как сапожник (в смысле его общественной функции) относится к земледельцу, и признаёт, что содержание, количественную основу этого общественного отношения ещё предстоит осмыслить.

В течение многих последующих веков наука о хозяйстве практически не развивалась (или, быть может, до нас не дошли соответствующие источники), а мысль Аристотеля, главного авторитета средневековой науки, трактовалась преимущественно в этическом плане.

Вопрос, интересовавший средневековых философов[1], состоял в том, какими надлежит быть пропорциям обмена, а не в том, почему эти пропорции таковы, какие есть.

XVII…XIX вв.: объективные теории стоимости

Впервые чёткая формулировка закона стоимости была предложена английским экономистом У. Петти. Выдающийся английский учёный XVII в. провёл экономико-статистическое исследование связи цен товаров с затратами труда на их производство. Исследование показало, что основой пропорции обмена двух товаров является соотношение полных затрат рабочего времени, необходимого на их создание и доставку к месту обмена. У. Петти отмечал, что на этой основе вырастает целый комплекс общественных отношений, определяющих отклонения пропорций обмена от соотношений затрат труда.

У. Петти признавал существование объективной, не зависящей от воли или желания людей, основы пропорций обмена. Его теория относится к классу *объективных теорий стоимости*. Аналогичных взглядов на закон стоимости придерживался А. Смит.

Развитие науки ещё не подготовило почву для объяснения, как люди на рынке могут узнать, сколько труда затрачено на производство каждого товара. Ближе всех учёных своего времени к осознанию этого механизма подошёл Д. Рикардо, также сторонник трудовой теории стоимости, труды которого вошли в теоретический фундамент всех современных направлений экономической науки.

Современный вид *трудовая теория стоимости*, основы которой заложены У. Петти и развиты Д. Рикардо, приобрела благодаря К. Марксу. В трудах знаменитого немецкого экономиста дано её исчерпывающее изложение. В дальнейшем новых крупных достижений в обосновании трудовой теории стоимости получено не было, хотя многие её положения успешно развивались в трудах В.В. Новожилова, В.С. Немчинова и других исследователей.

[1] В древности и средневековье экономические вопросы входили в сферу компетенции философии. Как самостоятельная наука экономика стала формироваться начиная с XVII в.

Впоследствии сформировались объективные теории стоимости, в которых в основу пропорций обмена клались затраты отдельных ресурсов или всей совокупности ресурсов, необходимых для производства товаров. Широкого распространения они не получили.

Первая половина XX в.: субъективные теории стоимости

Долгое время трудовая теория стоимости оставалась господствующей, хотя среди её сторонников имелись расхождения по многим позициям. В последней трети XIX в. она стала предметом критики со стороны австрийских экономистов Е. Бём-Баверка, а затем К. Менгера. Эти исследователи считали, что связь пропорций обмена с затратами труда, даже если существует, носит косвенный характер, являясь лишь следствием подлинного закона стоимости, в основе которого лежит субъективная оценка людьми предельной полезности (т.е. полезности последней приобретаемой единицы товара).

Теория Е. Бём-Баверка и его последователей получила название *теории предельной полезности*.

Вскоре благодаря трудам А. Маршалла из теории предельной полезности выросла *неоклассическая теория цен*. На её основе удалось получить достаточно убедительное объяснение механизма рыночного ценообразования. А. Маршаллом установлено равенство цены блага (выраженной в деньгах) одновременно предельным издержкам его производства и его предельной полезности.

В рамках неоклассической теории не было найдено общепризнанного решения вопроса о том, чем определяется цена элементов издержек, а следовательно, и величина предельных издержек. Тем не менее, она вскоре практически полностью вытеснила трудовую теорию стоимости.

Теории, подобные теории предельной полезности в том отношении, что они стремятся найти объяснение существующим пропорциям обмена в субъективных предпочтениях людей, называют *субъективными теориями стоимости*.

Широкое признание неоклассической теории не означает, что она бесспорна. Она располагает достаточно сложной системой постулатов, истинность которых, как и в случае трудовой теории, должна быть предметом проверки практикой. К настоящему времени ни одна из теорий стоимости не получила бесспорного подтверждения, поэтому их следует рассматривать как детально разработанные гипотезы о законе образования пропорций обмена.

Вследствие этого любой метод исследования стоимости является в своих существенных чертах аксиоматическим. Углубление и развитие системы аксиом, приближение аксиоматики к очевидным реалиям экономической жизни — основная тенденция современных исследований.

Вторая половина XX в.: метод моделирования в теории стоимости

С появлением теории систем и концепции изоморфизма аксиоматический метод исследования стоимости трансформируется в метод моделирования. Обязательными требованиями к теории становятся экономическая интерпретация аксиом и теорем, чёткая формулировка условий, при которых данная интерпретация является возможной.

В основе современных модельных подходов к исследованию закона стоимости лежит, как правило, идея, сформулированная французским учёным эпохи Возрождения П. Буагильбером. Он указывал на важнейшую общественную функцию цен — обеспечение сбалансированности и пропорциональности в экономике. Эта идея была развита в конце XIX в. Л. Вальрасом, автором первого математического описания потоков благ в формальной экономической системе, основанного на строгой аксиоматике. Им была высказана гипотеза о существовании конкурентного равновесия в его модели. Математический аппарат, позволивший исследовать условия, при которых эта гипотеза оказывается справедливой, был разработан лишь к 50-м годам XX в. С помощью этого аппарата модели, аналогичные вальрасовской, исследовались в трудах Ж. Дебре, К. Эрроу, Л. Маккензи, В.Л. Макарова и других учёных.

В число предпосылок моделей вальрасовского типа не входят предположения о механизме образования цен. Эти модели, утверждая существование конкурентного равновесия, не отвечают на вопрос о том, как складываются (и складываются ли вообще) равновесные цены в описываемых ими экономических системах. Они нацелены на изучение не причины, а функций цен, и призваны ответить на второй вопрос теории стоимости, сформулированный в начале главы. Труды экономистов-математиков середины и конца XX в. открыли возможность дальнейшего развития теории стоимости несмотря на то, что её главный вопрос — что является причиной цен — остался спорным. Из этого семейства в пособии будет рассмотрена модель Эрроу-Дебре.

Хорошо известна модель адаптации цен к совокупному спросу, предложенная П. Самуэльсоном[1]. Она дополняет модель Вальраса, описывая реалистичный механизм ценообразования в конкурентной экономике. Однако в модели Самуэльсона цены выступают только в качестве механизма согласования спроса и предложения, оставляя открытым вопрос о том, почему действия независимых хозяев, заботящихся только о собственной прибыли, соответствуют этой модели. Кроме того, в модели считается (вопреки наблюдаемой реальности), что все хозяева пользуются одними и теми же ценами.

Для исследования стоимостного баланса в экономических системах, связи материального и стоимостного аспектов процесса производства применяют балансовую модель В. Леонтьева и её разновидности. В отличие от моделей вальрасовского типа, леонтьевские модели, как правило, не абстрактные, а числовые, т.е. оперируют конкретными данными, а не только переменными величинами. Они дают возможность статистической проверки теоретических выводов, позволяют решить вопрос о соответствии модели реальности. Простота и ясность предпосылок модели, большой опыт её численных реализаций позволяют с уверенностью переносить результаты, полученные для данной модели, на реальность.

Серьёзные аргументы в пользу объективной теории стоимости были получены в СССР Л.В. Канторовичем. Им была исследована модель, в которую входят балансы благ и целевая функция, отражающая приоритеты данной экономической системы. Основная заслу-

[1] Эта модель обыкновенно изучается в курсе экономической теории, поэтому в данном пособии не рассматривается. При необходимости читатель может обратиться к книгам П. Самуэльсона и С.А. Ашманова, приведённым в библиографическом списке к данному разделу.

га Л.В. Канторовича состоит в обосновании положения, согласно которому стоимостные показатели неизбежно образуются в процессе поиска оптимального плана. Ему принадлежит гипотеза о том, что общественная стоимость также складывается объективно в процессе поиска состояния, наилучшим образом отвечающего интересам всех хозяйствующих субъектов. Метод, разработанный Л.В. Канторовичем и независимо от него Г.Б. Данцигом, позволил построить модели, позволяющие не только анализировать свойства стоимости, но определять количественные значения цен для решения конкретных прикладных задач. Многие исследователи считают, что Л.В. Канторович внёс самый крупный вклад в развитие теории стоимости в течение XX века.

Семейство моделей расширяющейся экономики Неймана-Гейла позволяет детально исследовать законы роста стоимости экономической системы и проясняет сущность процента на капитал. Более сложные модели экономической динамики устанавливают условия, при которых стоимость оказывается одной и той же независимо от того, каковы предпочтения хозяйствующих субъектов.

Резюме

1. Стоимость (причина цен) является характеристикой блага, цена — характеристикой сделок.

2. Вопрос о законе, определяющем пропорции обмена товаров, остаётся открытым.

3. Все существующие теории стоимости подразделяются на субъективные и объективные.

4. Самая известная объективная теория стоимости — трудовая теория, субъективная — неоклассическая теория цен.

5. Ныне широкое распространение получила неоклассическая теория цен.

6. Основные классы моделей, применяемых в теории стоимости, — модели вальрасовского типа, балансовые модели В. Леонтьева, модели Л.В. Канторовича, модели расширяющейся экономики Неймана-Гейла.

Библиографический список

1. Аникин А.В. Юность науки: Жизнь и идеи мыслителей-экономистов до Маркса. 4-е изд. М.: Политиздат, 1985.

2. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984.

3. Всемирная история экономической мысли. М.: Мысль, 1987-1990. — Т. 1, с. 127-134, 429-442; т. 2, с. 25-29, 49-58; т. 3, с. 104-128, 130-142, 150-168; т. 4, с. 430-457.

4. Курс экономической теории / Под ред. проф. Чепурина М.Н., проф. Киселёвой Е.А. Киров, 1994. — С. 24-37.

5. Немчинов В.С. Применение математических методов в экономических исследованиях и планировании // Академик В.С. Немчинов: Избранные произведения. М.: Наука, 1967. — Т. 3, с. 80-97.

6. Немчинов В.С. Математические методы в экономике и планировании // Академик В.С. Немчинов: Избранные произведения. М.: Наука, 1967. — Т. 3, с. 98-106.

7. Новожилов В.В. Проблемы измерения затрат и результатов при оптимальном планировании. М.: Экономика, 1967.

8. Петти В. Экономические и статистические работы. М.: Госполитиздат, 1940.

9. Рикардо Д. Начала политической экономии и налогового обложения // Антология экономической классики. В 2 тт. / Сост.: д.э.н. И.А. Столяров. М.: Эконов, 1993. — Т. 1, с. 397-473.

10. Смит А. Исследование о природе и причинах богатства народов // Антология экономической классики. В 2 тт. / Сост.: д.э.н. И.А. Столяров. М.: Эконов, 1993. — Т. 1, с. 79-396.

11. Струмилин С.Г. Проблемы экономики труда. М.: Госполитиздат, 1957.

12. Хикс Дж. Стоимость и капитал. М.: Прогресс, 1988.

13. Debreu G. Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium. N.Y., L., 1959. — P. 28-36.

14. Samuelson P.A. Foundations of Economic Analysis. Cambridge, Massachusetts, 1948.

Контрольные вопросы и задания

1. Назовите основные вопросы, решаемые теорией стоимости.
2. Охарактеризуйте различия между категориями «стоимость» и «цена».
3. Можно ли говорить о цене блага, не являющегося товаром? Почему?
4. Каковы были научные представления о стоимости в древнем мире и в средние века?
5. Кто предложил трудовую теорию стоимости?
6. По какому признаку теории стоимости делят на объективные и субъективные?
7. Каковы были предпосылки создания теории предельной полезности?
8. Что имеют в виду, говоря об аксиоматическом характере современных теорий стоимости?

9. Обсудите причины отсутствия общепризнанной теории стоимости в настоящее время.

10. Какие причины, на ваш взгляд, способствовали распространению субъективных теорий стоимости?

11. Перечислите учёных, внёсших наибольший вклад в развитие объективных и субъективных теорий стоимости.

12. Охарактеризуйте роль моделирования в развитии теории стоимости.

13. Перечислите основные классы математических моделей, используемых в исследованиях по теории стоимости, и задачи, для решения которых они применяются.

1.2. Системный подход в теории стоимости

Возможности системного подхода

В приложении к теории стоимости системный подход может решать лишь ограниченный круг задач, однако эти задачи весьма важные. Применение системного подхода к теории стоимости сводится к построению математической модели экономики, населённой очень простыми абстрактными целенаправленными системами, и исследованию поведения этих систем. Цель этого исследования — ответить на следующие вопросы: может ли образоваться нечто, подобное стоимости, в мире таких систем, наделённых некоторыми чертами хозяйствующих субъектов, действующих в реальном мире? если да, то какие свойства этих систем оказываются существенными для образования этого подобия стоимости, а какие нет? наконец, если в абстрактном мире подобия стоимости образуются, то достаточно ли оснований для того, чтобы считать, что в реальном мире имеют место те же процессы, что и в модели, несмотря на то, что абстрактные системы устроены несравненно проще, чем реальные хозяйствующие субъекты, и уж во всяком случае не обладают такими качествами, как разум, фантазия, смекалка?

Процессы, происходящие в мире абстрактных систем, сами по себе интереса не представляют. Их нужно исследовать для того, чтобы понять, как образуется и что представляет собой стоимость в реальности. Существование определённого закона, определяющего пропорции обмена в модели, непреложно только по отношению к этой модели. Может ли такой же закон действовать в реальной экономике —

выяснение этого вопроса уже за пределами возможностей системного подхода. Даже если доказано, что переменные модели и реальной экономики связаны одними и теми же отношениями (т.е. что модель изоморфна её объекту), эти отношения, общие для обеих систем — абстрактной и реальной — могут существовать в силу совершенно разных причин. Значит, стоимостные переменные в модели и реальности также могут быть обусловлены разными причинами, хотя в рамках упрощённой абстрактной экономики это различие остаётся скрытым. Если изоморфизм доказан, то явления, обнаруженные в модели, обязательно присущи реальности, а вот объяснения этих явлений в реальности могут быть иными, чем в модели. Их можно относить к реальной экономике только в том случае, если они получили подтверждение сначала при посредстве методов экономической статистики и эконометрики, затем — при практическом применении следующих из них выводов и рекомендаций.

Из сказанного ясно, что *стоимость как экономическая категория*, т.е. стоимость, существующая в реальности, и *стоимость как системная категория*, существующая в мире абстрактных систем, с которой мы будем иметь дело в главах 2 и 3 — это далеко не одно и то же. В главе 4 мы выясним (насколько это позволяют современное состояние экономической теории и рамки учебного курса), что общего и в чём возможные отличия между этими двумя категориями, и покажем, какие результаты, полученные при исследовании моделей, можно переносить на реальную экономику.

Формы представления систем

Любая система может быть представлена в различных *формах* в зависимости от целей её исследования. Эти формы можно разделить на две группы по признаку учёта процессов управления, происходящих в системе. Если цель исследования такова, что абстрагироваться от процессов управления недопустимо, система представляется в форме *системы управления*, или *кибернетической системы*. При анализе экономических систем обычно используется именно эта форма, если только речь не идёт об изучении определённого состояния, закономерно достигнутого в процессе управления.

Другие формы представления систем мы детально рассматривать не будем, кроме важнейшей для целей нашего пособия — формы *системы, не обладающей свободой*. Эта форма используется для описания систем:

- для которых процессы управления нехарактерны либо несущественны, как-то атомное ядро, Солнечная система;
- исследуемых в течение времени, за которое их состояние не может сколько-нибудь существенно измениться.

Систему можно представить в форме системы управления разными способами. Назовём два наиболее распространённых:

- *алгоритмическая система* (закон управления представлен в виде алгоритма);
- *целенаправленная система* (закон управления выражается целевой функцией).

Целенаправленные системы можно классифицировать по признаку реализации закона управления. Если система реагирует на из-

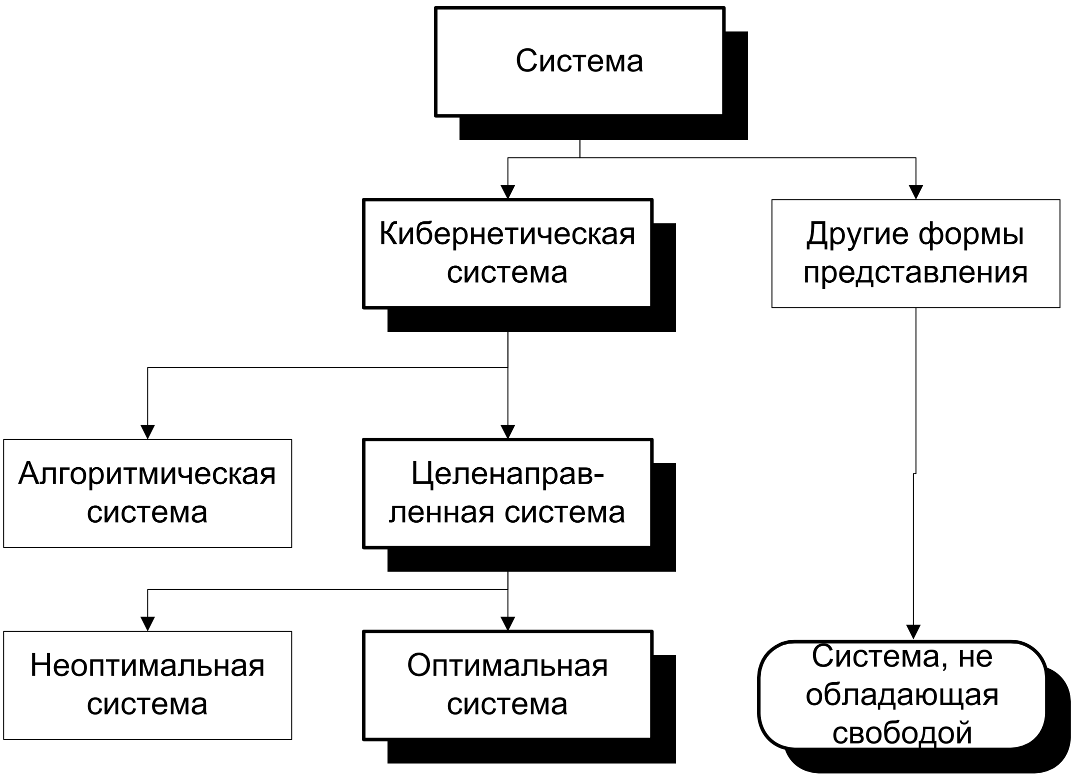

Рис. 1. Формы представления систем

менение состояния среды таким образом, что немедленно переходит в оптимум для нового состояния, т.е. находится в оптимуме постоянно, говорят об *оптимальной системе*. В противном случае, если предполагают, что система сколько-нибудь продолжительное время может находиться в неоптимальном состоянии, соответствующую форму представления называют *неоптимальной системой*, имея в виду, что система не находится в состоянии оптимума в момент исследования, хотя стремится к состоянию оптимума.

На рис. 1 рассмотренная выше классификация форм представления систем отображена графически.

Формы представления систем не ограничиваются приведённой классификацией, принимающей во внимание только различия по представлению процессов управления. Различные формы представления требуются в случаях, когда следует или, наоборот, не следует принимать во внимание стохастические процессы, присущие объекту, изменение его состояния с течением времени, элементы, из которых он состоит.

Объект и форма его представления

Если мы говорим о некоторой системе как о кибернетической системе, это не значит, что изучаемый объект *является* кибернетической системой; это означает, что он обладает такими свойствами, которые мы сможем изучить, лишь рассмотрев его в форме кибернетической системы; но если в рамках другого исследования эти его свойства окажутся несущественными, мы сможем выбрать для него другую форму представления.

Нижеследующий пример показывает, как один и тот же объект может быть представлен в формах оптимальной и неоптимальной систем. Прогнозируя динамику продаж продукции мясоперерабатывающего завода, мы можем рассмотреть его в форме оптимальной системы, чтобы иметь возможность моделировать объём продаж при тех или иных изменениях состояния рынка исходя из предположения, что предприятие всякий раз выберет вариант, максимизирующий стоимость его капитала. Выбирая вариант вложения свободных денежных средств для этого же предприятия, мы рассматриваем его как неоптимальную систему, поскольку в рамках имеющихся ограничений у него, скорее всего, имеются лучшие варианты использования этих средств, нежели хранение их на расчётном счёте.

Выбор форм представления экономических систем

Экономисты-математики, разработавшие разнообразные математические модели, используемые для экономических исследований, чаще всего использовали одну из трёх форм представления систем: неоптимальную систему, оптимальную систему и систему, не обладающую свободой. Давайте разберёмся, почему это происходит.

При *решении задач планирования* широко используется представление экономических систем в форме неоптимальных систем. В этом случае предполагается, что некоторые ограничения, обусловившие реальное состояние системы, с течением времени будут преодолены, поскольку пути их преодоления уже известны; в рамках оставшихся ограничений состояние системы неоптимальное; цель управления известна.

При *исследовании поведения* экономической системы её необходимо представлять в форме системы управления. В этом случае абстрагироваться от процессов управления без ущерба для результатов практически невозможно. Цели управления обычно бывают известны, либо относительно них можно выдвинуть достаточно обоснованные гипотезы. Поэтому из числа возможных форм представления, объединяемых термином «система управления», следует выбрать целенаправленную систему. Наконец, коль скоро речь идёт о фактическом, а не идеальном функционировании экономической системы, её следует представлять в форме оптимальной системы. Иначе оказывается, что система, управляемая целью, не реализует её при наличии реальных возможностей, т.е. фактически не управляется этой целью.

При *анализе фактического или ожидаемого состояния* экономической системы адекватной формой представления является система, не обладающая свободой. Действительно, независимо от того, обладает ли исследуемая система свободой на самом деле (а экономическая система ею, безусловно, обладает), свобода не может быть реализована в статической модели: для этого требуется время, в течение которого осуществляется переход в новое состояние из числа возможных.

Математические модели, соответствующие всем трём формам представления, обладают общими свойствами, которые позволяют ввести понятие стоимости как математическую абстракцию. Эти свойства соответствуют оптимальным состояниям целенаправленных систем (у неоптимальной системы они будут проявляться в исключительном случае, у оптимальной — всегда) и любому состоянию системы, не обладающей свободой. Как будет показано далее, отсутствие свободы — необходимое условие существования стоимости. Оптимальным состояниям стоимость присуща потому, что они достигаются в результате снятия свободы системы управляющим воздействием. Вплоть до изменения цели управления или значений неуправляемых переменных система, находящаяся в состоянии оптимума, не обладает свободой реализовать цель управления в более полной мере.

Резюме

1. Выбор формы представления любой системы определяется целью исследования.

2. В экономической науке чаще всего используется представление объектов исследования в формах неоптимальной системы, оптимальной системы и системы, не обладающей свободой.

3. Каждая из этих форм представления экономических систем позволяет исследовать стоимость экономических благ.

Библиографический список

1. Гатаулин А.М. Система прикладных статистико-математических методов обработки экспериментальных данных в сельском хозяйстве. М., 1992. — Т. 1.

2. Крайзмер Л.П. Кибернетика: Учебное пособие для студ. с.-х. вузов по эконом. спец. — 2-е изд. М.: Агропромиздат, 1985.

3. Математика и кибернетика в экономике: Словарь-справочник. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Экономика, 1975.

4. Мэнеску М. Экономическая кибернетика: Сокр. пер. с рум. М.: Экономика, 1986.

5. Попкович И.В. Методика экономических исследований в сельском хозяйстве: Учеб. пособие для студентов с.-х. вузов по экон. спец. — 4-е изд. М.: Экономика, 1982.

6. Светлов Н.М. Системный анализ целей и его приложение к аграрному производству: Лекция по курсу «Общая теория систем и системный анализ» для студентов отделения «Математические методы и исследование операций в АПК». М.: 1998.

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое форма представления системы?

2. Приведите пример представления одного и того же объекта в формах алгоритмической системы и системы, не обладающей свободой.

3. В каких случаях неоптимальная система может находиться в состоянии оптимума?

4. Может ли объект, обладающий свободой, быть представлен в форме системы, не обладающей свободой?

5. Назовите причины широкого использования неоптимальной системы как формы представления систем в экономических исследованиях.

6. Какие формы представления систем позволяют ввести математическое понятие стоимости? Что общего у этих форм?

Глава 2. Стоимость как системная категория

2.1. Стоимость при монопольном использовании ресурсов

2.1.1. Система с целенаправленным поведением в условиях ресурсных ограничений

Стоимость в оптимальной системе

Чтобы ввести стоимость как системную категорию, рассмотрим абстрактную систему $E(\mathbf{x}, \mathbf{q})$, где $\mathbf{x} = (x_j)$ — вектор переменных системы, $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = (q_i(\mathbf{x}))$ — вектор отношений, упорядочивающих переменные системы x_j.

Положим, $E(\mathbf{x}, \mathbf{q})$ (далее будем обозначать её просто E) обладает следующими свойствами:

- для её функционирования требуются ресурсы, предоставляемые средой в количествах $\mathbf{y} = (y_i)$ в единицу времени;
- закон поведения системы сформулирован в виде функции предпочтения (целевой функции) от $\mathbf{x}$;
- множество допустимых состояний системы ограничивает сверху её функцию предпочтения;
- переменные системы принимают только неотрицательные значения.

С учётом этих предположений E может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} \max F(\mathbf{x}) ; \\ q_i(\mathbf{x}) \leqslant y_i , \ i \in I; \\ x_j \geqslant 0; \ j \in J, \end{cases} \tag{2.1}$$

где x_j — переменные системы; $\mathbf{x} = (x_j)$; y_i — переменные среды, означающие интенсивности (скорости) поступления ресурсов в систему; q_i — функции, отображающие значения переменных системы на потребности в ресурсах в единицу времени; $F(\mathbf{x})$ — функция предпочтения, отображающая значения переменных системы на величину, максимизируемую поведением системы; I — множество ресурсов; J — множество переменных системы. Значение функции предпочтения удобно трактовать как интенсивность производства (синтеза) некоторого условного блага в единицу времени. Далее будем называть это условное благо *целевым*.

Предположим, что имеют место утверждения:

- оптимальное решение задачи (2.1) существует;
- $F(\mathbf{x})$ и q_i непрерывны и дифференцируемы на областях определения.

Поведение такой системы можно представить как процесс постоянного приспособления к меняющимся значениям y_i. Как только эти значения изменяются, система решает задачу (2.1), и переменные x_j немедленно приобретают значения, определённые в результате решения. Функцию $F(\mathbf{x})$ лучше называть функцией предпочтения, а не целевой функцией, чтобы подчеркнуть, что она задаёт закон фактического, а не желаемого, поведения системы. Таким образом, данная система всегда находится в состоянии оптимума по критерию $F(\mathbf{x})$, поэтому по форме представления отнесём её к классу оптимальных систем.

Любое ограничение может быть охарактеризовано с точки зрения того, как изменение его объёма (т.е. величины y_i) влияет на значение функции $F(\mathbf{x})$. Или, другими словами, любому ресурсу можно поставить в соответствие влияние изменения интенсивности его поступления в систему E на значение функции предпочтения этой системы. По этому признаку все ограничения могут быть разделены на две группы — *эффективные* и *неэффективные*. Бесконечно малое изменение объёма эффективного ограничения приводит к изменению значения функции предпочтения. Это бывает только тогда, когда $q_i(\mathbf{x}) = y_i$. Бесконечно малое изменение объёма неэффективного ограничения не влияет на функцию предпочтения. Это необходимо бывает в случае, если $q_i(\mathbf{x}) < y_i$, но возможно и при $q_i(\mathbf{x}) = y_i$.

Ресурсы, ограничения по которым эффективны, называют *дефицитными* или *ограниченными*, остальные — неограниченными. Неограниченность ресурса не означает, что он доступен системе в любом количестве, но что он доступен ей в количестве, превышающем необходимое.

Далее нас, как правило, будут интересовать только ограниченные ресурсы.

Вследствие того, что ограниченные ресурсы влияют на функцию предпочтения системы E, они оказываются соизмеримыми. Поставим в соответствие каждому ресурсу i величину p_i, равную приросту $F(\mathbf{x})$ вследствие увеличения y_i на единицу в точке $\mathbf{x}$ $\left(\text{т.е. } \dfrac{\partial F}{\partial y_i}\right)$. Если ресурс неограниченный, соответствующая p_i равна нулю, что означает независимость (в некоторых пределах) значения $F(\mathbf{x})$ от интенсивности поступления в систему этого ресурса. Мы получили возможность измерять ресурсы, несоизмеримые по своей природе, выражая их количества в единицах $F(\mathbf{x})$. Каждому вектору интенсивностей поступления ресурсов $\mathbf{y} = (y_i)$ можно поставить в соответствие вектор $\mathbf{p} = (p_i)$.

> Иногда можно однозначно установить только совокупное влияние нескольких ресурсов на оптимальное значение функции предпочтения. Оно может быть распределено между ними разными способами (т.е. существуют разные векторы $\mathbf{p}$).

С точки зрения функции предпочтения замена ресурса g ресурсом h в пропорции p_h единиц g на p_g единиц h является равноценной. Это утверждение верно для количеств g и h, при которых значения p_g и p_h остаются неизменными, т.е. по крайней мере для бесконечно малых количеств (в частных случаях, возможно, и для бóльших).

Относительно предпочтений системы E любой способ, посредством которого можно приобрести дополнительную единицу ресурса i, *эффективен*[1], если он уменьшает $F(\mathbf{x})$ менее чем на p_i. Вкупе с выгодой от использования ресурса i, составляющей p_i, такой способ позво-

[1] Здесь речь идёт о *вновь открываемых* способах. Среди способов, доступных оптимальной системе в данный момент и отражённых соотношениями (2.1), нет ни одного эффективного: ни один из них не может обеспечить дополнительную единицу ресурса i ценой уменьшения значения F менее чем на p_i. Иначе можно было бы использовать эффективный способ для увеличения значения функции предпочтения, что означало бы неоптимальность нынешнего состояния системы E.

ляет увеличить $F(\mathbf{x})$. Напротив, любой способ, которым можно израсходовать единицу ресурса i, эффективен, если он увеличивает $F(\mathbf{x})$ более чем на p_i. Следовательно, величины p_i выполняют функцию *нормативов эффективности использования ресурсов системой* E. Это утверждение верно для количества ресурса i, при котором p_i остаётся неизменной, т.е., по крайней мере, для бесконечно малого количества.

Итак, ограниченным ресурсам, используемым системой E, соответствуют величины p_i, которые позволяют соизмерять ресурсы, являются нормативами эффективности их использования и пропорциями их эквивалентной взаимозамены. Назовём эти величины значениями *стоимости* ресурсов.

Стоимость ресурса естественно измерять в единицах функции предпочтения, т.е. в единицах целевого блага. Стоимость единицы ресурса измеряется в величинах

$$\frac{\left(\dfrac{\text{единица целевого блага}}{\text{единица времени}}\right)}{\left(\dfrac{\text{единица данного ресурса}}{\text{единица времени}}\right)} = \frac{\text{единица целевого блага}}{\text{единица данного ресурса}}.$$

Стоимость целевого блага численно равна его количеству, а стоимость его единицы равна единице. О других способах измерения стоимости рассказывается на стр. 28.

Величины стоимости в (2.1), как правило, обладают свойством *локальности*: сколь угодно малое изменение хотя бы одной y_i, скорее всего, приведёт к изменению некоторых p_i.

Пока что мы ввели понятие стоимости исключительно по отношению к формальной системе (2.1); оно не может быть распространено на экономические системы. Для E не определено понятие цены, и стоимость ресурсов, используемых этой системой, не может поэтому рассматриваться в качестве причины цен. Чтобы исследовать связь стоимости и цен, необходимо рассмотреть поведение независимых систем, действующих в общей среде, совместно эксплуатирующих общие для них ресурсы и имеющих возможность обмениваться ими. Это будет сделано в п. 2.2.

Такое понимание стоимости не требует наличия разумного субъекта с его представлением о стоимости ресурсов. Оптимальная система, если её структура и характер взаимодействия со средой могут быть описаны в форме (2.1):

- обладает всеми необходимыми свойствами для того, чтобы используемые ею ограниченные ресурсы имели стоимость (как характеристику ресурсов, используемых системой, а не как экономическую величину);
- содержит в себе и в своей среде всю информацию, необходимую для определения величин стоимости.

Множители Лагранжа как измерители стоимости

Для решения задачи (2.1) можно исследовать функцию Лагранжа, имеющую вид

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{л}) = F(\mathbf{x}) - \sum_{i \in I} \lambda_i f_i(\mathbf{x}). \qquad (2.2)$$

Здесь $\mathbf{л} = (\lambda_i)$ — вектор *множителей Лагранжа*, $f_i(\mathbf{x}) = q_i(\mathbf{x}) - y_i$ — функция превышения потребности в ресурсе i над его поступлением в единицу времени, остальные обозначения те же, что и в (2.1).

Седловой точкой функции Лагранжа называется точка $(\mathbf{x}^*, \mathbf{л}^*)$, в некоторой окрестности которой

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{л}^*) \leqslant L(\mathbf{x}^*, \mathbf{л}^*) \leqslant L(\mathbf{x}^*, \mathbf{л}). \qquad (2.3)$$

Все векторы $\mathbf{x}^*$, соответствующие седловым точкам функции Лагранжа, являются оптимумами задачи (2.1). Кроме того, оптимумом задачи (2.1) могут быть векторы $\mathbf{x}^*$, для которых вкупе с некоторыми $\mathbf{л}^*$ выполняются условия Куна-Таккера:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial L}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*, \mathbf{л}^*) \leqslant 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(\mathbf{x}^*, \mathbf{л}^*) \geqslant 0, \\
x_j^* \frac{\partial L}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*, \mathbf{л}^*) = 0, \qquad \lambda_i^* \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(\mathbf{x}^*, \mathbf{л}^*) = 0, \qquad (2.4) \\
i \in I, \quad j \in J.
\end{gathered}$$

Эти условия, в частности, выполняются для седловых точек. Никакие другие $\mathbf{x}$ не могут являться оптимумами задачи (2.1). Пару $(\mathbf{x}^*, \mathbf{л}^*)$, для которой выполняются условия (2.4), называют *точкой Куна-Таккера.*

Если вектор $\mathbf{x}^*$ представляет собой оптимальное решение задачи (2.1), то компоненты вектора $\mathbf{л}^*$, в паре с которым $\mathbf{x}^*$ образует точку Куна-Таккера, равны величинам прироста $F(\mathbf{x})$ вследствие увеличения соответствующих компонентов вектора $\mathbf{y}$ на бесконечно малую. Эти величины измеряются в единицах $F(\mathbf{x})$ в расчёте на единицу измерения соответствующего ограничения. Применительно к системе E мы назвали эти величины значениями стоимости.

Таким образом, в процессе решения задачи (2.1), описывающей систему E, наряду с оптимальным вектором $\mathbf{x}^*$ вычисляется вектор $\mathbf{л}^*$ стоимости ресурсов.

Четвёртое условие Куна-Таккера (поскольку $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = f_i(\mathbf{x})$) можно переписать в форме $\lambda_i^* f_i(\mathbf{x}^*) = 0$. В этой форме оно известно под названием *условия дополняющей нежёсткости.* Оно гарантирует, что $\lambda_i^* \neq 0$ только тогда, когда $f_i(\mathbf{x}^*) = 0$, т.е. когда ресурс i используется полностью. Из условия дополняющей нежёсткости следует, что в точке Куна-Таккера только один член функции Лагранжа может отличаться от нуля, а именно $F(\mathbf{x})$. Следовательно, в точке Куна-Таккера, соответствующей оптимуму задачи (2.1), значение функции Лагранжа равно оптимальному значению функции предпочтения системы E.

Представим функцию Лагранжа в форме

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{л}) = F(\mathbf{x}) - \sum_{i\in I}\lambda_i\, q_i(\mathbf{x}) + \sum_{i\in I}\lambda_i\, y_i. \tag{2.5}$$

Каждый член $л_i\, q_i(\mathbf{x})$ выражения (2.5) представляет собой стоимость потребляемого количества ресурса i, а $л_i\, y_i$ — стоимость количества ресурса i, поступающего в моделируемую систему. Из четвёртого условия Куна-Таккера следует, что в любой точке Куна-Таккера для любого блага i, как дефицитного, так и неограниченного, имеет место $л_i\, q_i(\mathbf{x}) = л_i\, y_i$. Смысл этого равенства в том, что вся стоимость, приобретаемая в форме благ, поступающих из среды системы E, расходуется в процессе их потребления (преобразования в целевое благо), вследствие чего система E располагает только стоимостью целевого блага (равной его выпуску).

Из того, что стоимость блага в системе E равна соответствующему множителю Лагранжа, не следует, что множитель Лагранжа *является* стоимостью. Задача (2.1) может соответствовать не системе E, а какой-либо другой системе. В этом случае вектор $\mathbf{л}^*$ может иметь другую интерпретацию.

Если для системы E существует единственный вектор $\mathbf{p}^*$ (т.е. стоимость каждого ресурса определена однозначно), то условиям Куна-Таккера соответствует ровно один вектор $\mathbf{л}^*$. В противном случае вектор $\mathbf{л}^*$, отвечающий условиям Куна-Таккера, не единственен. Множества всех векторов $\mathbf{p}^*$ и всех векторов $\mathbf{л}^*$ для системы E всегда совпадают. Может оказаться и так, что множество векторов $\mathbf{x}^*$, доставляющих функции предпочтения одно и то же оптимальное значение Z, состоит более чем из одного элемента.

Измерение стоимости количеством ограниченного ресурса

Стоимость, согласно определению, введённому на стр. 25, измеряется в единицах функции предпочтения в расчёте на единицу ресурса. Однако мерой стоимости может служить не только целевой, но любой ограниченный ресурс.

Если единица ресурса i' увеличивает значение функции предпочтения на $\lambda^*_{i'}$, а ресурса i'' — на $\lambda^*_{i''}$, то стоимость ресурса i'', выраженная в единицах i', составит $\lambda^*_{i''}/\lambda^*_{i'}$. Если очень малое количество ресурса i' заменить ресурсом i'' в пропорции $\lambda^*_{i''}/\lambda^*_{i'}$, то значение функции предпочтения не изменится, т.е. $\lambda^*_{i''}/\lambda^*_{i'}$ единиц ресурса i'' столь же предпочтительны (ценны) для системы (2.1), как и одна единица i'.

Но эти утверждения пока обоснованы только для случая, когда $F(\mathbf{x})$ имеет смысл функции предпочтения. Можно предположить, что если бы предпочтение системы (2.1) выражалось не в единицах $F(\mathbf{x})$, а в количестве ресурса i', стоимость ресурса i'', выраженная в единицах ресурса i', могла бы оказаться не равной $\lambda^*_{i''}/\lambda^*_{i'}$. Опровергнем это предположение. Для этого запишем задачу

$$
\begin{cases}
\min\, q_{i'}(\mathbf{x}); \\
q_i(\mathbf{x}) \leqslant y_i\,,\ i \in I \setminus I'\,; \\
F(\mathbf{x}) \geqslant Z\,; \\
x_j \geqslant 0,\ j \in J\,,
\end{cases}
\tag{2.6}
$$

называемую *взаимной* по отношению к задаче (2.1). Здесь Z — оптимальное для задачи (2.1) значение $F(\mathbf{x})$, $I' = \{i'\}$ — множество, состоящее из некоторого ограниченного ресурса i'. Как видим, (2.6) отличается от исходной задачи тем, что решается на минимум ресурса i' при значении функции предпочтения, ограниченном снизу на уровне оптимума задачи (2.1).

Функция Лагранжа для (2.6) имеет следующий вид:

$$
L'(\mathbf{x}, \mathbf{л}') = -\, f_{i'}(\mathbf{x}) - \left[\sum_{i \in I \setminus I'} \lambda_i'\, f_i(\mathbf{x})\right] + \lambda'\, F(\mathbf{x}),
\tag{2.7}
$$

где $\mathbf{л}' = (\lambda'_i)$ — вектор множителей Лагранжа задачи (2.6), соответствующих благам (для блага i' имеет место $\lambda'_{i'} = 1$); λ' — множитель Лагранжа для ограничения по значению функции $F(\mathbf{x})$. Заметим, что функции (2.2) и (2.7) отличаются лишь тем, что в первой из них единичный коэффициент стоит перед членом $F(\mathbf{x})$, а во второй — перед $-\, f_{i'}(\mathbf{x})$. Значит, если $(\mathbf{x}^*, \mathbf{л}^*, \lambda'^*)$ — точка Куна-Таккера для (2.2), то $(\mathbf{x}^*, \mathbf{л}'^*)$ — точка Куна-Таккера для (2.7), где $\mathbf{л}'^* = \dfrac{1}{\lambda^*_{i'}}\, \mathbf{л}^*$. Оптимальные векторы $\mathbf{x}^*$ для задач (2.1) и (2.6) совпадают, а $q_{i'}(\mathbf{x}^*) = y_{i'}$, т.е. оптимальное значение целевой функции задачи (2.6) равно фактической интенсивности поступления ресурса i' в систему E.

Итак, относительно стоимости верны следующие утверждения:

- она может измеряться не только в единицах функции предпочтения, но и в единицах любого ограниченного ресурса, при этом соотношение стоимости любых двух ресурсов остаётся неизменным (независимость стоимости от её измерителя);
- если предпочтение данной системы изменится и будет измеряться количеством любого ограниченного ресурса при условии

$F(\mathbf{x}) \geqslant Z$, то соотношения стоимости любых двух ресурсов остаются неизменными.

Наряду с другими благами стоимость может измеряться величиной затрат труда. С формальной точки зрения труд как субстанция стоимости подобен любому другому благу как субстанции стоимости. Особое место, справедливо отводимое труду всеми без исключения экономическими теориями, обусловлено тем, что это единственное благо, которое со стороны человека представляет собой расходование его времени, физической энергии, интеллектуальных и организационных способностей. Поэтому роль труда в экономике и, в частности, в образовании стоимости намного сложнее, нежели просто роль экономического блага. В данной книге мы абстрагируемся от специфики труда на том основании, что одного только метода моделирования недостаточно для её изучения. Посредством этого метода в рамках моделей, рассматриваемых в настоящем пособии, рассматриваются свойства стоимости, характерные для *любого* блага, независимо от его особых качеств.

Резюме

1. Стоимость ресурса есть величина прироста функции предпочтения данной системы, вызванного бесконечно малым увеличением интенсивности поступления данного ресурса. Стоимость измеряется в единицах функции предпочтения в расчёте на единицу ресурса.

2. Стоимость позволяет соизмерять разнородные ресурсы, представляет собой пропорцию эквивалентной взаимозамены ресурсов, является нормативом эффективности их использования.

3. Значения стоимости чувствительны к изменению интенсивностей поступления ресурсов в систему.

4. Стоимость блага в системе E исчерпывающим образом определяется соотношением (2.1) при заданных интенсивностях поступления ресурсов. Она равна величине соответствующего множителя Лагранжа.

5. Любой ограниченный ресурс, используемый системой, может служить измерителем стоимости.

Библиографический список

1. Гранберг А.Г. Моделирование социалистической экономики: Учеб. для студ. экон. вузов. М.: Экономика, 1988. — С. 55-59.

2. Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И. Линейное и выпуклое программирование. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1967. — С.29-34, 80-118,137-186, 310-315, 361-376.

3. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964.

4. Ланкастер К. Математическая экономика. М.: Советское радио, 1972.

5. Справочник по математике для экономистов / Под ред. В.И. Ермакова. М.: Высшая школа, 1987. — С. 185-207, 227-233.

Контрольные вопросы и задания

1. Какую информацию о ресурсе несёт величина его стоимости?

2. Что означает локальность стоимости?

3. В каких случаях множители Лагранжа представляют собой значения стоимости?

4. В каких единицах измеряются множители Лагранжа, соответствующие балансам ресурсов в системе E?

5. Как выразить стоимость некоторого ресурса в единицах измерения выбранного ресурса, если известно решение задачи (2.1)?

6. Что понимают под независимостью стоимости от её измерителя?

7. Что такое условие дополняющей нежёсткости?

8. Свидетельствует ли, с вашей точки зрения, равенство значений стоимости множителям Лагранжа в пользу объективного характера стоимости?

2.1.2. Стоимость в системах, описываемых линейными моделями

Система, описываемая задачей линейного программирования

Рассмотрим систему $E_1(\mathbf{x}, \mathbf{q})$ (далее — E_1), которая обладает всеми свойствами системы $E(\mathbf{x}, \mathbf{q})$ и, сверх того, $F(\mathbf{x})$ и все $q_i(\mathbf{x})$ в ней линейны: $F(\mathbf{x}) = \sum_j c_j x_j$, $q_i(\mathbf{x}) = \sum_j a_{ij} x_j$, $i \in I$, $j \in J$, где c_j и a_{ij} — коэффициенты пропорциональности. Такую систему можно представить в форме системы неравенств

$$\begin{cases} \max \sum_{j \in J} c_j x_j ; \\ \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \leqslant y_i , \; i \in I; \\ x_j \geqslant 0, \; j \in J. \end{cases} \tag{2.8}$$

Величина переменной x_j в этом случае может рассматриваться как интенсивность технологического процесса j, преобразующего ресурсы в целевое благо, коэффициенты c_j — как выход целевого блага в расчёте на единицу интенсивности технологического процесса j, a_{ij} — затраты ресурса i в расчёте на единицу интенсивности технологического процесса j.

С математической точки зрения задача (2.8) представляет собой *задачу линейного программирования* (ЗЛП). Эта задача является частным случаем задачи (2.1) и, следовательно, обладает всеми её свойствами. Наряду с ними задачам линейного программирования (и описываемым при их посредстве системам) присущ ряд особенностей, рассмотренных ниже.

Объективно обусловленные оценки благ в ЗЛП

Как известно из курса математического программирования, любой ЗЛП можно поставить в соответствие двойственную ЗЛП. По отношению к двойственной исходную задачу называют прямой. Задаче вида (2.8) можно поставить в соответствие двойственную задачу

$$\begin{cases} \min \sum\limits_{i \in I} y_i\, p_i\,; \\ \sum\limits_{i \in I} a_{ij}\, p_i \geqslant c_j\,,\ j \in J; \\ p_i \geqslant 0,\ i \in I. \end{cases} \tag{2.9}$$

Множество оптимальных решений (2.9) совпадает с множеством векторов множителей Лагранжа, соответствующих оптимальным решениям (2.8).

Величины p_i, полученные в результате решения задачи (2.9), называют:

- двойственными оценками *ограничений* задачи (2.8);
- объективно обусловленными оценками *ресурсов* системы E_1.

Для ЗЛП термины «двойственная оценка» и «множитель Лагранжа» тождественны. Термин «объективно обусловленные оценки» в литературе, как правило, применяется только к благам и, следовательно, требует, чтобы ЗЛП имела экономическую интерпретацию. Если задача (2.8) описывает систему E_1 (т.е. если она имеет именно то экономическое содержание, которым наделена система E_1), то объективно обусловленные оценки представляют собой значения стоимости благ для этой системы.

Задача (2.8) обладает рядом свойств, не присущих задаче (2.1).

1. Оптимальные значения целевых функций задач (2.8) и (2.9) равны. Совокупная стоимость ресурсов, используемых системой E_1 (равно как и доступных ей), равна оптимальному значению её функции предпочтения.

> Это свойство вытекает из *первой теоремы двойственности в линейном программировании*, утверждающей, что для пары взаимно двойственных задач имеет место один из двух взаимоисключающих случаев: а) обе задачи имеют оптимальные решения, при этом значения их целевых функций совпадают; б) множество допустимых решений одной из задач пусто, а целевая функция другой не ограничена на множестве допустимых решений.
>
> *Вторая теорема двойственности в линейном программировании*, известная также под названием условия дополняющей нежёсткости, представляет собой частный случай третьего (для двойственной ЗЛП) и четвёртого (для прямой ЗЛП) условий Куна-Таккера (2.4).

2. Если прямая задача имеет альтернативные решения (т.е. существует более одного оптимального вектора $\mathbf{x}^*$), то двойственная задача вырождена (т.е. по крайней мере одно её ограничение является линейной комбинацией других ограничений). Если прямая задача вырождена, то двойственная задача имеет альтернативные решения.

> Следовательно, стоимость хотя бы одного ресурса системы E1 может быть неопределённой тогда и только тогда, когда задача (2.8) вырождена.

3. Если, наряду с $\mathbf{x}^*$, существует другое оптимальное решение задачи (2.8), то эта задача имеет бесконечно много решений. Аналогичное утверждение верно и по отношению к задаче (2.9).

4. Оптимальный вектор $\mathbf{x}^*$ и соответствующий ему вектор $\mathbf{p}^*$ *устойчивы*.

Свойство устойчивости состоит в том, что если стоимость ресурса i единственна, то существует ненулевая окрестность y_i, в которой вектор $\mathbf{p}^*$ остаётся неизменным. Если ресурс имеет точно определённую стоимость, а интенсивность поступления его в систему меняется, стоимость его, а равно и других ресурсов, некоторое время остаётся неизменной. Стоимость остаётся устойчивой также при изменении в некоторых пределах коэффициентов a_{ij} в ограничениях, соответствующих дефицитным благам. Система E_1 — такой частный случай системы E, которому не присуще характерное для последней свойство локальности стоимости.

Понятие двойственности распространяют (с некоторой долей условности) и на нелинейные задачи, подразумевая под двойственной задачу, обеспечивающую отыскание вектора $\mathbf{p}$.

Экономическое содержание двойственной ЗЛП

Чтобы лучше понять экономическую суть двойственной ЗЛП и объективно обусловленных оценок, воспользуемся следующим приёмом. Сформулируем задачу о величинах эффективности благ в оптимальном плане задачи (2.8), опираясь на условия оптимальности и их прямые следствия, и убедимся, что эта задача и есть двойственная ЗЛП. Напомним, что эффективность блага — это величина изменения выпуска целевого блага при малом изменении доступного количества данного блага и прочих равных условиях.

Во-первых, искомые эффективности неотрицательны. Благо, для которого это не выполняется, заведомо не будет использовано для производства целевого блага.

Во-вторых, раз речь идёт о состоянии оптимума, то для любого технологического процесса $j \in J$

$$\sum_{i \in I} a_{ij}\, p_i \geqslant c_j. \tag{2.10}$$

Если хотя бы для одного процесса это не выполняется, то, увеличив интенсивность этого процесса (и соответствующие затраты дефицитных благ), на единицу, мы в состоянии увеличить выпуск целевого блага на

$$c_j - \sum_{i \in I} a_{ij}\, p_i. \tag{2.11}$$

Это значит, что в (2.8) оптимум ещё не достигнут: напомним, что в левой части неравенства (2.10) положительные a_{ij} соответствуют затратам благ, следовательно, выпуск целевого блага превышает потери, обусловленные отвлечением благ из других технологических процессов. Напротив, ситуация

$$c_j - \sum_{i \in I} a_{ij} \, p_i < 0 \tag{2.12}$$

вполне может встречаться в оптимальном плане: процесс j, для которого это соотношение имеет место, просто не будет использован.

В-третьих, суммарный эффект, приносимый всеми используемыми благами, не может быть больше оптимального выпуска целевого блага:

$$\sum_{i \in I} y_i \, p_i \leqslant \sum_{j \in J} c_j \, x_j \, . \tag{2.13}$$

Иное означало бы, что существует способ получить большее количество целевого блага, нежели предусмотренное оптимальным планом.

Задача, содержащая условия (2.10), (2.13) и условие неотрицательности величин эффективности p_i, эквивалентна (2.9). Докажем это. Ограничения (2.10) и условия неотрицательности общие для обеих задач, так что достаточно доказать, что в условиях этих ограничений величина $\sum\limits_{i \in I} y_i \, p_i$ принимает наименьшее значение. Для этого заметим, что любое значение $\sum\limits_{i \in I} y_i \, p_i$, отвечающее условию (2.10), необходимо удовлетворяет условию

$$\sum_{i \in I} y_i \, p_i \geqslant \sum_{j \in J} c_j \, x_j \, . \tag{2.14}$$

Действительно,

$$\sum_{i \in I} y_i \, p_i \geqslant \sum_{i \in I} \left(p_i \sum_{j \in J} a_{ij} \, x_j \right) . \tag{2.15}$$

Это следует из балансов благ в задаче (2.8) вкупе с условиями $p_i \geqslant 0$, $i \in I$. Но, в силу (2.10) и неотрицательности x_j,

$$\sum_{j \in J} \left(x_j \sum_{i \in I} a_{ij} \, p_i \right) \geqslant \sum_{j \in J} c_j \, x_j \, . \tag{2.16}$$

Совместив два последних неравенства, получаем требуемый результат.

Значение $\sum_{i\in I} y_i p_i$, соответствующее условию (2.13), наименьшее среди всех значений, удовлетворяющих условию (2.14). Поэтому, решив задачу (2.9), мы найдём искомые значения эффективности благ в оптимальном плане задачи (2.8), что и требовалось доказать.

> Заодно мы доказали утверждение первой теоремы двойственности в линейном программировании, согласно которому значения целевых функций прямой и двойственной задач линейного программирования равны.

Следовательно (если, конечно, оптимальный план существует), величины эффективности должны быть такими, чтобы совокупный эффект имел наименьшее значение, допускаемое условиями неотрицательности и (2.10).

Согласно условию дополняющей нежёсткости (стр. 27), в оптимальном плане:

- технологический процесс используется лишь тогда, когда его выпуск равноценен затратам;
- благо не может обмениваться на целевое благо лишь в том случае, если оно используется не полностью, т.е. не дефицитно.

Резюме

1. Стоимость ресурсов в системах, которые можно описать линейными моделями, определяется путём составления и решения двойственной ЗЛП.
2. В системах, описываемых линейными моделями, стоимость благ устойчива.
3. Совокупная стоимость ресурсов, используемых системой E_1, равна оптимальному значению её функции предпочтения.

Библиографический список

1. Гейл Д. Теория линейных математических моделей. М.: Иностранная литература, 1963.
2. Гранберг А.Г. Моделирование социалистической экономики: Учеб. для студ. экон. вузов. М.: Экономика, 1988. — С. 224-225.
3. Данциг Г.Б. Линейное программирование, его применения и обобщения. М.: Прогресс, 1966.

4. Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И. Линейное и выпуклое программирование. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1967. — С. 29-34, 80-118, 137-186, 310-315, 361-376.

5. Канторович Л.В. Экономический расчёт наилучшего использования ресурсов. М.: Изд-во АН СССР, 1960.

6. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964.

7. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве / Гатаулин А.М., Гаврилов Г.В., Сорокина Т.М. и др.; под ред. А.М. Гатаулина М.: Агропромиздат, 1990. — С. 108-120.

Контрольные вопросы и задания

1. Как определить стоимость ресурсов в системах, описываемых линейными моделями?

2. Какова интерпретация двойственной ЗЛП?

3. Что такое объективно обусловленная оценка?

4. Какие особенности присущи стоимости в системах, описываемых линейными моделями?

5. Что подразумевается под устойчивостью стоимости в системе E_1?

6. Как формулируется условие дополняющей нежёсткости для ЗЛП?

7. Какие блага не могут обмениваться на целевое благо и почему?

2.1.3. Обобщение понятия стоимости

Система E и её важный частный случай — система E_1 не исчерпывают всего многообразия оптимальных систем. Существуют специфические системы, имеющие экономическую интерпретацию, но требующие более сложной формы представления, нежели система E. Кроме того, стоимость присуща, как уже отмечалось, не только оптимальным системам, поэтому необходимо рассмотреть особенности реализации стоимости в неоптимальных системах и системах, не обладающих свободой.

Системы вида E и отличающиеся от E только одной или несколькими особенностями, рассмотренными ниже, образуют класс систем, достаточно широкий для перехода к рассмотрению экономических моделей. Системы этого класса будем обозначать символом $\overline{E}$.

Ограничения по капитальным благам. Структурные ограничения

В *системе с капитальными благами* вектор-функция $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ включает ограничения по *наличию* запасов благ наряду с ограничениями по интенсивности их поступления.

Ограничения по капитальным благам математически ничем не отличаются от ограничений по интенсивности поступления ресурсов, кроме единиц измерения. Первые измеряются просто в единицах ресурса, а вторые — в единицах ресурса в единицу времени. Как следствие, единица измерения множителей Лагранжа по капитальным благам —

$$\frac{\text{единица целевого блага}}{\text{единица капитального блага} \times \text{единица времени}}.$$

Величина множителя Лагранжа характеризует стоимость не самого капитального блага, а его использования в течение некоторого времени. Стоимость капитального блага была бы равна множителю Лагранжа, если бы это благо исчезало вследствие использования и не смогло бы быть использовано вновь. Статическая модель вида (2.1) не содержит никакой информации о возможности повторного использования запаса и о связанном с ним дополнительном эффекте. Множитель Лагранжа вычисляется только исходя из эффекта использования капитального блага, получаемого в течение одного производственного цикла.

«Работу» или «услуги» капитальных благ можно рассмотреть как самостоятельные блага, а ограничение по капитальному благу — как ограничение по интенсивности поступления в систему блага «работа такого-то капитального блага». Единицы измерения капитальных благ и их использования связаны формулой

$$\text{единица работы капитального блага}= \\ =\text{единица капитального блага} \times \text{единица времени}.$$

Как следствие, единицы измерения этих ограничений и соответствующих множителей Лагранжа не будут отличаться от единиц измерения ограничений (множителей Лагранжа) по интенсивностям поступления других благ, Рассматриваемая здесь модель не позволяет определить стоимость самого капитального блага: удаётся установить только стоимость его использования. Чтобы выяснить закон, связывающий стоимость капитального блага со стоимостью его работы, требуется учёт фактора времени. Как это делается — показано на стр. 45 при обсуждении представления капитальных благ в модели вида (2.18).

Наряду с ограничениями, отражающими балансы благ, системе могут быть присущи соотношения, описывающие её собственную структуру, законы её функционирования. В такие ограничения не входят константы либо переменные, характеризующие среду данной системы либо отношения системы с её средой. Часто свободные члены этих ограничений равны нулю.

В некоторых случаях, когда имеет смысл рассматривать структурные ограничения как балансы благ, порождаемых самою системой, значения соответствующих им множителей Лагранжа могут рассматриваться как стоимость соответствующих благ. В противном случае эти значения не следует трактовать как стоимость, но можно использовать при анализе структуры моделируемой системы, поскольку они характеризуют влияние законов её функционирования, выражаемых соответствующими ограничениями, на результаты. Наличие и форма структурных ограничений, как правило, влияют на значения множителей Лагранжа, соответствующих ограничениям других типов (по интенсивностям поступления благ или по капитальным запасам), но не меняют их смысл: они, как обычно, выражают стоимость благ с точки зрения цели функционирования данной системы.

Зависимость структуры системы от её состояния и от времени

Если структура системы закономерно изменяется с изменением значений её переменных или с течением времени, её, как правило, описывают в одной из следующих форм.

1. Система, интенсивность поступления ресурсов в которую является функцией её состояния (т.е. зависит от него):

$$\begin{cases} \max F(\mathbf{x}); \\ q_i(\mathbf{x}) \leqslant y_i(\mathbf{x}),\ i \in I; \\ x_j \geqslant 0,\ j \in J. \end{cases} \tag{2.17}$$

Поскольку математически увеличение доступного количества некоторого ресурса тождественно сокращению его потребления, этот случай легко сводится к форме (2.1) путём переноса членов $y_i(\mathbf{x})$ в левые части неравенств.

2. Система

$$\begin{cases} \max F(\mathbf{x}) \,; \\ q_{it}(\mathbf{x}) \leqslant y_{it} \,, \; i \in I, \; t \in T; \\ x_j \geqslant 0, \; j \in J \end{cases} \tag{2.18}$$

отличается от E тем, что значения её переменных, а следовательно, и функция предпочтения обусловлены потоками ресурсов не только в настоящем, но и в будущем. Здесь T — множество моментов времени, t — индекс момента времени, $q_{it}(\mathbf{x})$ — функция, отображающая значения переменных системы на потребность в ресурсе i в момент t, y_{it} — интенсивность поступления в систему ресурса i в момент t.

Балансы благ в (2.18) дезагрегированы во времени. При этом одно и то же благо, используемое в разные моменты времени, трактуется подобно тому, как если бы это были совершенно разные блага. Это достаточно распространённая форма представления экономических систем, использованная, например, Л.В. Канторовичем в его динамической модели производственного планирования.

Система (2.18) изоморфна системе E и представляет собой её конкретизацию, поэтому их математические свойства, в т.ч. касающиеся стоимости, одинаковы. Однако (2.18) содержательнее системы E в её обыкновенной интерпретации. Она позволяет решать вопрос о соотношении стоимости одного и того же блага i в разные моменты времени. Эти соотношения показывают, какое количество данного блага в момент t_1 способно компенсировать утрату единицы того же самого блага в момент t_2.

Можно показать, что если благо допускает хранение без потерь, стоимость его в момент t_1 будет не меньше, чем в момент t_2, если $t_1 < t_2$. Стоимость такого блага в процессе функционирования системы (2.18) ни в коем случае не будет расти, но, возможно, будет снижаться. В практических задачах, сводящихся к форме (2.18), стоимость благ, хранящихся без потерь, как правило, снижается.

Это отличие от наблюдаемой реальности, в которой цены благ зачастую растут, обусловлено тем, что в модели мерилом стоимости благ, существующих в разные моменты, служит одно и то же благо, существующее в определённый момент. В реальности мы наблюдаем блага, существующие одновременно, и соотношения значений их стоимости. Эти соотношения для заданного блага могут как расти, так и убывать.

Если хранение предполагает некоторые затраты (в т.ч. потери), то в следующем периоде оно может быть дороже, чем в предыдущем, но не более чем на стоимость хранения его единицы. Стоимость хранения — это стоимость всех благ, затрачиваемых в процессе хранения, включая потери, за вычетом стоимости благ, образующихся при хранении, например, отходов. Если хранение блага в промежутке между двумя последовательными периодами действительно имеет место (т.е. величина запасов, переходящих из предыдущего периода в последующий, не равна 0), стоимость блага в будущем периоде будет отличаться от стоимости в предыдущем ровно на величину затрат на хранение.

Предположим, что в числе благ, описываемых задачей (2.18), имеются деньги. Пусть $p_t^\$$ — стоимость денег в момент времени t. Величина $p_t^\$ / p_{t+1}^\$$ никогда не бывает меньше единицы. Она показывает, во сколько раз должна увеличиться денежная сумма за период $[t;\ t+1]$, чтобы её стоимость осталась неизменной. Соответственно, $(p_t^\$ / p_{t+1}^\$ - 1)$ — величина процента, под который следовало бы положить деньги, чтобы избежать потерь от изменения их стоимости за период $[t;\ t+1]$. При этом неважно, существует такая возможность или нет.

Если в экономической системе существует гарантированная возможность хранить деньги под процент r в течение периода $[t;\ t+1]$, то в момент $t+1$ деньги обязательно будут дешевле, чем в предыдущий — по крайней мере, на столько, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{p_t^\$}{p_{t+1}^\$} - 1 \geqslant r\,. \tag{2.19}$$

Если возможности хранения используются, неравенство обращается в строгое равенство.

3. Система с динамической структурой:

$$\begin{cases} \max F(\mathbf{x}_\tau)\ ; \\ q_{it}\,(\mathbf{x}_t,\, \mathbf{x}_{t-1}) \leqslant y_{it}\ ,\ i \in I,\ t \in T \setminus \{0\}; \\ \mathbf{x}_0 = \mathrm{const}; \\ x_{jt} \geqslant 0\ ,\ j \in J,\ t \in T \setminus \{0\}. \end{cases} \qquad (2.20)$$

Здесь τ — последний момент времени моделируемого периода, $\mathbf{x}_t$, $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_\tau$ — векторы значений переменных системы в момент времени t, в начальный и последний моменты времени соответственно, x_{jt} — значение j-й переменной в момент t, $q_{it}\,(\mathbf{x}_t,\, \mathbf{x}_{t-1})$ — функция, отображающая значения переменных системы на потребность в ресурсе i в момент t, остальные обозначения те же, что в (2.18). Потребность такой системы в ресурсах зависит от момента времени и от её предшествующего состояния. В процессе управления принимается во внимание влияние управляющего воздействия не только на переменные, но и на структуру системы. С формальной точки зрения такая система тоже не отличается от системы (2.18) и, следовательно, от (2.1): математически она представляет собой их частный случай.

С переходом от дискретного представления времени к непрерывному возникают задачи, в которых требуется отыскать не значения переменных, а функцию поведения. Эти задачи также описывают системы с динамической структурой. Они решаются с использованием методов вариационного исчисления и оптимального управления. Эти методы позволяют найти не только функции поведения, максимизирующие значение функционала, выражающего предпочтения системы, но и переменные, характеризующие влияние изменений объёмов ограничений по ресурсам на значение функционала. Для ограничений конкретной задачи, имеющих смысл балансов благ, эти переменные соответствуют величинам стоимости подобно множителям Лагранжа в системе E. Подробнее задачи этого типа рассматриваются в рекомендуемой литературе.

Стохастические системы

Систему называют *стохастической*, если в соответствии с целями исследования она должна быть представлена в форме, явно учитывающей случайный характер хотя бы одной её переменной. Пример — системы, подобные E, но отличающиеся от неё тем, что либо функция $F(\mathbf{x})$, либо вектор $\mathbf{q}$, либо вектор свободных членов $\mathbf{y}$, либо все они вместе случайные.

Анализ стохастических систем с точки зрения стоимости — непростая задача. Она решена лишь для немногих частных случаев. В общем случае каждому вектору случайных величин $\mathbf{o}$ из множества O возможных векторов ставятся в соответствие:

- модель, соответствующая требуемой форме представления данной системы (например, модель вида E — её в этом случае логично будет обозначить $E(\mathbf{o})$);
- вероятность $c(\mathbf{o})$ реализации данного вектора.

Каждому $\mathbf{o}$ соответствуют вектор $\mathbf{x}(\mathbf{o})$ значений переменных системы $E(\mathbf{o})$ и вектор $\mathbf{p}(\mathbf{o})$ стоимости благ, реализующиеся при данном $\mathbf{o}$.

Функция

$$c(\mathbf{x}') = \sum_{\mathbf{o}\in \mathrm{O}_{\mathbf{x}'}} c(\mathbf{o}), \tag{2.21}$$

где $\mathrm{O}_{\mathbf{x}'} = \{\mathbf{o} \mid \mathbf{o} \in \mathrm{O},\ \mathbf{x}(\mathbf{o}) = \mathbf{x}'\}$, описывает распределение вероятностей состояний системы. Вероятность каждого состояния (т.е. значения $\mathbf{x}'$) определяется как сумма вероятностей всех векторов случайных значений, при которых система оказывается в данном состоянии. Вектор

$$\overline{\mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{o}\in \mathrm{O}} c(\mathbf{o})\, \mathbf{x}(\mathbf{o}) \tag{2.22}$$

представляет собой математическое ожидание вектора значений переменных системы, а величина

$$m = \sum_{\mathbf{o}\in \mathrm{O}} c(\mathbf{o})\, F(\mathbf{x}(\mathbf{o})) \tag{2.23}$$

— математическое ожидание значения её функции предпочтения.

Аналогичным способом вводятся функция распределения вероятностей значений стоимости благ и вектор математических ожиданий значений стоимости:

$$c(\mathbf{p}') = \sum_{\mathbf{o}\in \mathrm{O}_{\mathbf{p}'}} c(\mathbf{o}), \tag{2.24}$$

$$\overline{\mathbf{p}} = \sum_{\mathbf{o} \in O} c(\mathbf{o})\, \mathbf{p}(\mathbf{o}), \tag{2.25}$$

где $O_{\mathbf{p}'} = \{\mathbf{o} \mid \mathbf{o} \in O,\ \mathbf{p}(\mathbf{o}) = \mathbf{p}'\}$.

В общем случае невозможно точно вычислить величины, приведённые выше, если хотя бы одна случайная переменная может принимать бесконечно много значений или если вероятность хотя бы одного значения не известна точно. Обычно используют более или менее грубое приближение к действительным законам распределения и математическим ожиданиям переменных и стоимости.

Стоимость как количественно определённая величина присуща детерминистической системе. В стохастической речь идёт о математическом ожидании стоимости, которое представляет собой взвешенные значения стоимости, вычисленные при решении детерминистических задач для всех случайных условий. Можно выделить специфические постановки задач, отличающиеся по трактовке стоимости.

1. В моделях вида E, соответствующих текущему или прошедшему моменту, когда случайные переменные уже приняли конкретные значения, стоимость благ детерминирована[1].

2. Если такая же модель описывает *конкретную* гипотетическую ситуацию в будущем, стоимость также детерминирована. Она характеризует данную ситуацию безотносительно к вероятности её реализации.

3. Если известны все возможные реализации случайных условий и их вероятности на определённый момент времени в будущем, можно определить математические ожидания значений стоимости.

4. Наконец, если имеется только гипотеза о вероятностях возможных реализаций случайных условий, рассчитанные математические ожидания стоимости будут характеризовать эту гипотезу независимо от того, верна она или нет.

---

[1] Может оказаться, что хотя случайные переменные приняли в прошлом конкретные значения, эти значения известны не достоверно. В этом случае задача о стоимости приобретает стохастический характер.

Динамические модели вида (2.18) и (2.20) описывают процессы, которые ожидаются в будущем. Если только речь не идёт о наборе моделей данного вида, отражающих различные варианты реализации случайных условий, решения этих моделей всегда следует трактовать как характеризующие конкретную гипотезу о реализации случайных условий в будущем — гипотезу, которая может не соответствовать фактическому исходу.

> Для формирования стоимости в реальных экономических системах балансы благ в будущем существенны. Реальные процессы формирования стоимости в значительной мере обусловлены предположениями индивидуумов о реализации случайных условий в будущем.

Сочетание свойств рассмотренных систем

В формальном описании одной системы могут сочетаться ограничения по интенсивности поступления и запасам благ, соотношения, описывающие внутреннюю структуру системы. Динамическая система вида (2.18) или (2.20) может содержать ограничения, характерные для (2.17), в которых интенсивность поступления блага зависит от состояния системы. Совместное присутствие таких ограничений в одной модели не меняет интерпретации множителей Лагранжа. Система, для описания которой требуется такая модель, может быть при необходимости представлена в стохастической форме точно так же, как и система E.

Особый интерес представляют ограничения по капитальным благам в системе, предусматривающей дезагрегированные во времени балансы благ, например, в (2.18). Объёмы этих ограничений для любого момента времени, кроме начального, могут быть переменными. В этом случае в модели предусматривают соотношения для расчёта величины запаса капитального блага в момент t. Эти соотношения можно интерпретировать как ограничения интенсивности поступления в систему данного капитального блага в этот момент, а соответствующие множители Лагранжа — как стоимость единицы соответствующих капитальных благ. Можно доказать, что стоимость капитального блага в момент t равна совокупной стоимости его работы за время, оставшееся до конца моделируемого периода. Итак, если в модели с динамической структурой имеются ограничения по капитальным ресурсам, множители Лагранжа для ограничений по их использованию отражают, как обычно, стоимость их использования, а для ограничений по формированию капитальных запасов — стоимость самих капитальных благ.

Отношения вторых к первым имеют смысл сроков окупаемости капитальных ресурсов. Они измеряются в единицах времени. Обратные величины суть процент на капитал данного вида — норма равноценной замены систематического поступления капитального блага, начиная с данного момента времени, запасом этого же капитального блага, имеющимся в данный момент. Единица измерения этого показателя — величина, обратная единице времени. Величину процента можно определить и иначе: как соотношение стоимости капитальных благ в два соседних периода, уменьшенное на единицу. С этим способом мы уже встречались (стр. 41).

Стоимость в неоптимальной системе

При использовании формы неоптимальной системы предполагается одно из двух:

- закон поведения системы не соответствует цели, выраженной данной (или вообще какой-либо) функцией предпочтения;
- система ограничений не имеет отношения к ограничениям, действующим в данный момент.

Это не значит, что модель не соответствует объекту. Просто цель исследования в этом случае состоит в моделировании поведения объекта в условиях, отличающихся от наблюдаемых в данный момент. Например, цель, не соответствующую фактическому поведению системы, можно заложить в модель именно для того, чтобы найти возможность изменить поведение в требуемом направлении. Ограничения могут отличаться от действующих в данный момент, но соответствовать более или менее отдалённому будущему, когда некоторые из нынешних ограничений будут преодолены, а другие возникнут.

Если целевая функция модели не соответствует закону поведения моделируемой системы, множители Лагранжа нельзя рассматривать как значения стоимости благ для этой системы. Однако они будут соответствовать значениям стоимости для этой системы, если её поведение в самом деле удастся подчинить императиву, математически выраженному целевой функцией модели. Если система ограничений отличается от действующей, множители Лагранжа *будут* соответствовать стоимости благ для моделируемой системы, *если* последняя окажется в условиях ограничений, предусмотренных моделью.

Когда неоптимальная система не находится в состоянии оптимума, значение её функции предпочтения можно увеличить в рамках имеющихся ресурсов. О стоимости ресурсов в этом случае говорить бессмысленно: пока имеется другой способ увеличения значения функции предпочтения, нет резона делать это за счёт приобретения дополнительного ресурса.

> Если в рамках некоторой задачи можно утверждать, что приобретение ресурса системой, не находящейся в состоянии оптимума, всё-таки имеет смысл (например, впрок), имеет место одно из двух:
> - либо выбранная форма представления не адекватна этой задаче (например, неправильно формализована цель управления, так что она не учитывает пользу для системы от использования избыточных ресурсов в будущем);
> - либо допускается логическая ошибка, состоящая в неявном переходе к рассмотрению состояния данной системы в другой момент времени, когда оптимум уже будет достигнут.

Стоимость в неоптимальной системе имеет место только тогда, когда речь идёт об её оптимуме, и характеризует только это оптимальное состояние безотносительно к тому, каким способом оно будет достигнуто, будет ли достигнуто и достижимо ли вообще. Кроме своего идеального характера, во всех остальных отношениях эта стоимость ничем не отличается от стоимости в оптимальной системе. Всё сказанное выше о семантике ограничений, динамической структуре, случайностях верно и для оптимума неоптимальной системы.

Стоимость в системе, не обладающей свободой

Понятие стоимости естественно вводить по отношению к целенаправленным системам (что и сделано в данном пособии). Факт существования цели снимает трудную для понимания проблему мерила стоимости: эту роль, очевидно, играет степень достижения цели системы. Однако, как уже отмечалось, стоимость обретает количественную определённость не вследствие целенаправленности системы, а вследствие снятия её свободы управляющим воздействием, реализующим её цель. Рассмотрение систем, не обладающих свободой, позволит установить:

- формальные условия существования стоимости;
- существование стоимости при выполнении этих условий независимо от цели системы;
- достаточность этих условий для измеримости стоимости.

Роль целей (следовательно, и предпочтений), с точки зрения теории стоимости, состоит в том, что благодаря им системы достигают состояний, в которых стоимость может существовать.

Рассмотрев измерение стоимости количеством ограниченного ресурса в оптимальной системе, мы убедились, что функция предпочтения перестаёт играть особую роль в образовании стоимости, коль скоро оптимум достигнут. В точке оптимума функция предпочтения приобретает форму ограничения $F(\mathbf{x}) \geqslant Z$, ничем не отличающегося от других ограничений. Это позволяет нам считать стоимость не только нормой преобразования некоторого блага в целевое при неизменной интенсивности поступления в систему других благ, но и вообще *нормой замены одного блага другим при неизменном уровне потребления моделируемой системой остальных дефицитных благ.*

Можно предложить два понимания системы, не обладающей свободой:

- система вида
$$\begin{cases} q_i(\mathbf{x}) \leqslant y_i\,,\ i \in I; \\ x_j \geqslant 0,\ j \in J, \end{cases} \tag{2.26}$$
где все обозначения те же, что и в (2.1), при условии, что ограничениям этой задачи соответствует единственный вектор $\mathbf{x}$ (т.е. в геометрической интерпретации множество допустимых решений этой задачи представляет собой точку);
- система вида (2.1), множество допустимых решений которой содержит более одной точки, но значение функции предпочтения одинаково во всех её точках.

В первом случае понятие целевого блага бессодержательно, поскольку затраты и выпуски всех благ предопределены. В них невозможно трактовать стоимость как влияние изменения интенсивности поступления ресурса в систему на выпуск целевого блага. Только что введённое понимание стоимости, более универсальное, даёт возможность преодолеть эту трудность и распространить понятие стоимости на такие системы. Величину стоимости можно определить, хотя функция предпочтения вовсе не задана. Для этого, например, можно построить функцию Лагранжа, приняв $F(\mathbf{x}) = 0$.

Во втором моделируемая система сама по себе, безотносительно к функции предпочтения, обладает свободой. При другом задании функции предпочтения значения последней могут оказаться различными в разных точках множества допустимых решений. Стоимость благ в такой системе определяется аналогично стоимости в системе E.

Понятие стоимости удаётся ввести применительно к системам различных видов потому, что они с самого начала или после замены функции предпочтения ограничением $F(\mathbf{x}) \geqslant Z$ обладают общим математическим свойством. Их системы ограничений таковы, что сколь угодно малое изменение объёма некоторых ограничений (а именно эффективных) приводит к исчезновению множества допустимых решений, если только одновременно закономерным образом не изменён объём каких-либо других ограничений (которые, в свою очередь, тоже должны быть эффективными). Взаимность задач математического программирования — следствие этого общего свойства.

> С одной стороны, целенаправленные системы всегда свободны, иначе они не смогли бы реализовывать свои цели: процессы управления невозможны в условиях отсутствия свободы. С другой, стоимость предполагает отсутствие свободы. Кажущееся противоречие ведёт к парадоксальному заключению: в целенаправленных системах стоимости быть не может. На самом деле этот вывод верен только для состояний целенаправленной системы в период между изменением условий среды и (или) структуры системы и соответствующим актом управления. Представление системы в форме оптимальной системы игнорирует эти состояния.
>
> По завершении акта управления система уже не обладает свободой улучшения своего состояния вплоть до очередного изменения среды или собственной структуры. Этого вполне достаточно для того, чтобы в системе возникла стоимость.

Предпочтение — основа понимания стоимости как экономической категории; но стоимость, рассматриваемая как формальная характеристика балансовых соотношений абстрактных систем, с предпочтением не связана: она возникает и в системах, для которых предпочтения не определены вообще. Роль предпочтений состоит в том, что абстрактная стоимость реализуется в конкретных экономических системах благодаря им. Действительно, экономические системы обладают свободой; стоимость в таких системах не может образоваться иначе, чем вследствие акта управления; процессы управления в экономических системах суть реализация предпочтений субъектов управления.

В долгосрочном плане особая роль целевого блага начинает проявляться в том, что соответствующее ему ограничение после снятия свободы системы актом управления всегда эффективно[1], в то время как любое другое ограничение может оказаться неэффективным. Поэтому стоимость можно выразить в целевом благе всегда, а в любом другом — только тогда, когда соответствующее ограничение эффективно.

Резюме

1. Условие образования стоимости — возможность представления системы в форме системы, не обладающей свободой.

2. Любое благо, баланс которого описывается эффективным ограничением, может служить измерителем стоимости.

3. Особенность целевого блага состоит в том, что в форме системы, не обладающей свободой, соответствующее ему ограничение всегда эффективно.

4. Если модель с балансами благ, дезагрегированными во времени, содержит ограничения по капитальным благам с переменным объёмом, то при её посредстве можно определить стоимость капитальных благ наряду со стоимостью их использования.

5. Соотношение стоимости использования капитального блага и самого капитального блага имеет смысл процента на капитальный запас данного вида.

---

[1] С математической точки зрения оно может не быть эффективным, если внутренность множества, на котором функция предпочтения постоянна, целиком содержит допустимое множество модели; но это означает, что функция предпочтения на деле не выражает никакого предпочтения в пределах этого множества. Модели, содержащие такие функции предпочтения, не имеют смысла при описании систем управления (в т.ч. экономических систем).

Библиографический список

1. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. М.: Наука, 1988.

2. Гранберг А.Г. Моделирование социалистической экономики: Учеб. для студ. экон. вузов. — М.: Экономика, 1988. — С. 351-361.

3. Интролигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс, 1975.

4. Канторович Л.В. Экономический расчёт наилучшего использования ресурсов. М.: Изд-во АН СССР, 1959. — Прил. 1.

5. Копёнкин Ю.И. Стохастические модели оптимального планирования сельскохозяйственного производства: Лекция для слушателей ФПК. М.: 1981.

6. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для эк. специальностей вузов / В.А. Колемаев, О.В. Староверов, В.Б. Турундаевский; под ред. В.А. Колемаева. М.: Высшая школа, 1991.

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое капитальное благо?

2. Запишите математическую форму системы с динамической структурой.

3. Что представляет собой система с дезагрегированными во времени балансами благ?

4. Докажите, что единица измерения отношения множителей Лагранжа для ограничений по использованию и формированию капитальных запасов — «единица времени»$^{-1}$.

5. Верно ли утверждение «стоимость присуща только системам, не обладающим свободой»? Обоснуйте своё мнение.

6. Какие предположения делаются при представлении реальных систем в форме неоптимальной системы?

7. Какие трудности сопряжены с анализом стоимости в стохастических системах?

8. Какие особенности присущи целевому благу как измерителю стоимости?

2.2. Образование общей стоимости вследствие обменов

Исследование изолированной системы позволяет ввести стоимость как системную категорию, исследовать основные её свойства, но не даёт возможности перейти к рассмотрению стоимости как категории экономической. Действительно, в экономических системах стоимость реализуется в пропорциях обмена — ценах, а о каком обмене может идти речь в рамках модели единственной системы, которой обмениваться не с кем? Чтобы разобраться в процессах, происходящих в реальной экономике, мы рассмотрим модель системы, состоящей из *элементарных* систем, независимо преследующих свои собственные цели.

Подходы к оценке состояния многоэлементной системы

Оценить состояние системы, состоящей из множества подсистем, не так просто, как если бы речь шла о системе с заданной единой целью. Возможны следующие три подхода к сравнению состояний такой совокупности:

- принцип неухудшения;
- линейная комбинация (например, сумма) индивидуальных функций предпочтения подсистем;
- синтез критерия сравнения, не связанного с предпочтениями подсистемы.

Согласно первому принципу, одно из двух состояний системы считается лучшим в том случае, если ни одна из подсистем не находится в худшем состоянии (с точки зрения её функции предпочтения) и хотя бы одна пребывает в лучшем. Два состояния системы равноценны, если в каждом из них состояния всех подсистем равноценны. Если часть подсистем оказывается в лучшем, а часть — в худшем положении, состояния системы считаются несравнимыми.

С этой точки зрения наилучшей является ситуация, в которой ни одна система не может перейти в более предпочтительное состояние иначе, чем за счёт перехода некоторой другой системы в менее предпочтительное состояние. Такую ситуацию называют *оптимумом по Парето*.

В общем случае может существовать множество оптимумов по Парето, причём с индивидуальных позиций некоторой выделенной подсистемы эти оптимумы неравноценны: в одном из них её состояние может быть лучше, в другом хуже. Отдать предпочтение одному из оптимумов по Парето на основе принципа неухудшения невозможно.

Построение линейной комбинации индивидуальных функций предпочтения сводит задачу оценки состояния многоэлементной системы к задаче об оценке одной системы с единственным критерием.

Но оно имеет смысл только в том случае, если весовые коэффициенты, приписываемые каждой функции, допускают конкретную интерпретацию. Если двум подсистемам приписаны весовые коэффициенты p_a и p_b, то должно быть верным утверждение:

состояние системы, отличающееся от исходного тем, что функция предпочтения первой системы уменьшилась на p_b, а второй — увеличилась на p_a, равноценно исходному.

Задача оценки состояний системы сводится в этом случае к задаче оценки состояния системы с заданной функцией предпочтения.

Построение критерия функционирования многоэлементной системы, не зависящего от предпочтений её подсистем, также сводит задачу оценки состояний многоэлементной системы к оценке состояния системы с заданной функцией предпочтения. Подобный критерий обычно выражает субъективную цель исследователя. Даже в случае, когда он отражает собственную цель многоэлементной системы, при его посредстве обычно невозможно представить объект в форме оптимальной системы. Ведь поведение системы, состоящей из элементов, самостоятельно преследующих собственные цели, редко соответствует её собственной объективной цели.

Состояние системы, в котором достигается наилучшее значение функции предпочтения, приписанной многоэлементной системе в целом, будем называть *оптимумом в смысле заданной* (вменённой) *функции предпочтения*. Если вменённая функция предпочтения представляет собой линейную комбинацию индивидуальных функций предпочтения подсистем, то оптимум такой функции предпочтения всегда будет одним из оптимумов по Парето.

Предпосылки анализа стоимости при совместном использовании ресурсов

Введём в рассмотрение систему H:

- в её состав входит не менее двух систем $\overline{E}$ (см. стр. 37);
- общее количество каждого блага, поступающего в неё извне, неотрицательно и ограничено сверху;
- состояние системы H исчерпывающим образом описывается состоянием всех $\overline{E}$, входящих в её состав, интенсивностями по-

ступления в неё благ и размерами запасов капитальных благ, которыми она располагает;

- При любом распределении ресурсов, поступающих в систему H, допустимые множества всех входящих в неё $\overline{E}$ *выпуклы* и *замкнуты*;
- функции предпочтения всех $\overline{E}$, входящих в H, непрерывны и *вогнуты*;
- допустимые множества ограничивают сверху функции предпочтения всех $\overline{E}$, входящих в H.

По определению системы $\overline{E}$ значение её функции предпочтения зависит только от её переменных и, возможно, от времени. Значит, функция предпочтения некоторой заданной системы $\overline{E}$ не зависит от переменных других систем $\overline{E}$ в составе той же системы H, а также от интенсивностей поступления благ в H и от капитальных запасов, имеющихся в H, но ещё не распределённых между системами $\overline{E}$. Однако изменение этих величин может повлиять на значение функции предпочтения вследствие изменения значений переменных системы $\overline{E}$.

> В реальной экономике дело часто обстоит иначе. Прямое влияние значений переменных одной системы на предпочтения другой, известное под названием экстерналий, существует. Системе H экстерналии не присущи. Это упрощение необходимо учитывать при указании условий, которые должны выполняться, чтобы результаты её анализа можно было переносить на реальность.

Далее системы $\overline{E}$ будут именоваться *элементарными системами* по отношению к H.

Рассматривая изолированные системы $\overline{E}$, мы игнорировали возможность превышения производства благ над потреблением (кроме целевого блага). Если производство в изолированной системе $\overline{E}$ превышает потребление, благо заведомо не оказывается дефицитным, стало быть, не имеет стоимости, а его баланс безразличен для функции предпочтения. Говоря о совместной деятельности систем, мы не можем абстрагироваться от процессов производства, поскольку продукт данной системы может быть потреблён другими системами. Производимое благо, как правило, имеет стоимость для производящей системы, а объём производства в одной системе влияет на стоимость в других.

Требования к допустимым множествам и функциям предпочтения имеют целью избежать усложнения формы условия осуществимости обмена, необходимости уточнения понятия полной информированности систем $\overline{E}$ о возможностях обмена и т.п.

Согласование использования ресурсов посредством правил их распределения

Между системами, функционирующими в общей ресурсной среде, неизбежно возникает конфликт по поводу использования ресурсов. Модель функционирования этих систем должна отражать некоторый способ разрешения конфликта.

Самый простой способ состоит в том, что каждой системе $\overline{E}$ выделяется фиксированная и неизменная квота использования ресурса. Факт существования квоты означает, что каждая система может использовать фиксированное количество каждого блага — точно так же, как если бы она единственная существовала в ресурсной среде. Индивидуальные ресурсные среды при условии неизменности квот оказываются независимыми друг от друга. Задача о стоимости в общей ресурсной среде сводится к набору задач вида $\overline{E}$. Стоимость одного и того же блага для разных систем в этом случае, как правило, несоизмерима (хотя можно указать такой алгоритм назначения квот, что стоимость окажется соизмеримой, см. стр. 61).

Другой способ согласования использования ресурсов: для каждого блага заданы вероятности захвата очередной его порции каждой элементарной системой немедленно после поступления этой порции (предполагается, что поступившая в систему H порция ресурса обязательно захватывается одной из её элементарных систем). Вероятности присущи элементарным системам, обусловлены их свойствами и постоянны, по крайней мере, в течение исследуемого периода.

В этом случае интенсивности поступления благ в элементарные системы представляют собой случайные величины. Задача о стоимости в системе H сводится к стохастической разновидности задачи о стоимости в общей ресурсной среде при фиксированных квотах и, следовательно, к набору задач о стохастических системах $\overline{E}$, действующих в индивидуальных ресурсных средах.

Возможны и другие правила распределения ресурсов.

Согласование при посредстве свободного обмена

Предположим, что первоначальное распределение ресурсов происходит одним из способов, описанных выше, но наряду с этим разрешён обмен ресурсами между системами. На обмен никаких ограничений не накладывается, кроме того, что ни одна система не будет участвовать в акте обмена, если он приведёт к ухудшению её состояния. Если акт обмена предполагает обмен q_a единиц блага a, принадлежащих системе A из класса систем $\overline{E}$, на q_b единиц блага b, принадлежащих системе B из того же класса, то обмен состоится только при выполнении *условий осуществимости обмена*

$$q_a\, p_a^A > q_b\, p_b^A\,,\;\; q_a\, p_a^B < q_b\, p_b^B\,, \tag{2.27}$$

где p_a^A и p_b^A — *индивидуальная* стоимость благ a и b соответственно для системы A, p_a^B и p_b^B — то же для системы B, $q_a \to 0$, $q_b \to 0$. Соотношение q_a/q_b может быть любым, лишь бы выполнялось условие (2.27).

Обмен приводит к изменению значений стоимости для обеих систем, поскольку меняются количества доступных им благ. Как только одно из условий осуществимости обмена нарушится или одно из благ, предлагаемых к обмену, закончится, дальнейший обмен благами a и b между системами A и B прекратится.

Если речь идёт о количествах обмениваемых благ, то предмет обмена — капитальное благо. Действительно, чтобы обменяться некоторыми количествами благ, системы должны их накопить, т.е. образовать запас. Ничто, однако, не запрещает говорить об обмене интенсивностями поступления благ: система A передаёт системе B q_a единиц блага a в единицу времени в обмен на поставки системой B q_b единиц блага b в единицу времени в течение периода действия соглашения об обмене. Условие осуществимости обмена естественно распространить и на этот случай, а также на случай обмена капитального блага на обычное. Рассматривая образование стоимости в системах, функционирующих в общей ресурсной среде, будем пользоваться терминологией капитальных благ, подразумевая, что всё сказанное верно и для других случаев.

Обозначим символом H_1 разновидность системы H, в которой элементарные системы $\overline{E}$:

- являются оптимальными системами;
- обладают неограниченными возможностями обнаружения за сколь угодно короткое время партнёра, для которого условия осуществимости обмена выполняются, или, иначе, что они обладают полной информацией о возможных партнёрах;
- не обладают информацией о предпочтениях других систем, принимаемых ими решениях и стоимости благ для них.

Из этих условий следует, что в системе H_1 элементарные системы немедленно используют любую возникающую возможность улучшения значения функции предпочтения за счёт обмена, равно как и за счёт любого другого способа. Математически система H_1 может быть представлена в форме

$$\begin{cases} \max F_k(\mathbf{x}_k),\ k \in K\ ; \\ F_k(\mathbf{x}_k) \geqslant Z_k,\ k \in K; \\ \sum\limits_{k \in K} q_{ik}\,(\mathbf{x}_k) \leqslant y_i\ ,\ i \in I; \\ x_{jk} \geqslant 0;\ j \in J,\ k \in K, \end{cases} \tag{2.28}$$

где k — индекс элементарной системы, входящей в состав H_1, K — множество элементарных систем, Z_k — текущее значение функции предпочтения системы k, остальные обозначения аналогичны соответствующим обозначениям в (2.1). Состояние системы H_1 описывается матрицей $\mathbf{X} = (x_{ik})$.

Системы $\overline{E}$, составляющие в совокупности систему H_1, выполнив все возможные обмены, оказываются в ситуации, в которой обмен невозможен из-за того, что либо перестали выполняться условия осуществимости обмена, либо на обмен уже предложено количество блага, равное имеющемуся у системы. В этих условиях ни одна система не может перейти в более предпочтительное состояние иначе, чем за счёт перехода некоторой другой системы в менее предпочтительное, т.е. имеет место оптимум по Парето. Раз все системы, входящие в состав H_1, — системы оптимальные, H_1 может находиться только в оптимуме по Парето: иное означало бы, что хотя бы одна из элементарных систем не находится в состоянии оптимума, а следовательно, не является оптимальной.

Принятые нами предпосылки хотя и не гарантируют достижение оптимума по Парето в процессе обменов, но обеспечивают принципиальную возможность его достижения. Следовательно, математически предположение о том, что H_1 состоит из оптимальных систем, выполнимо. Можно указать дополнительные условия, при которых оптимум по Парето будет достигаться необходимо и которые, следовательно, согласуют форму системы H_1 с предположением о том, что $\overline{E}$ — оптимальная система. Экономическая интерпретация таких условий, однако, сталкивается с трудностями, которые будут обсуждены в п.4.1.

Закон поведения изолированной системы $\overline{E}$, сформулированный в виде функции предпочтения, как правило, позволяет точно определить, в каком состоянии должна оказаться эта система, если вектор $\mathbf{y}$ задан. Однако при совместном использовании ресурсов и возможности обмена дело обстоит иначе. Поскольку элементарные системы не знают о предпочтениях друг друга, пропорции обмена в пределах, устраивающих обе стороны, могут быть любыми. Без дополнительной информации мы не можем предугадать не только эти пропорции, но даже распределение их вероятностей. В общем случае существует множество возможных состояний, в которых может оказаться элементарная система, входящая в состав H_1, после исчерпания всех возможностей обмена. Как следствие, мы в принципе не можем предвидеть траекторию поведения системы H_1 в пространстве её состояний.

Тенденция к выравниванию значений индивидуальной стоимости

В рамках принятых предпосылок оказывается, что если некоторые две системы A и B, входящие в H_1, имеют ненулевые запасы каждого из двух благ a и b, то *относительная стоимость* этих благ в обеих системах равна, т.е.

$$\frac{p_a^A}{p_b^A} = \frac{p_a^B}{p_b^B} \ . \tag{2.29}$$

Действительно, если бы дело обстояло иначе, существовали бы нереализованные возможности обмена. Положим, что

$$\frac{p_a^A}{p_b^A} > \frac{q_b}{q_a} > \frac{p_a^B}{p_b^B}\,. \tag{2.30}$$

Это значит, что:

- условие (2.29) не выполняется;
- заданы некоторые количества q_a и q_b каждого из благ (настолько малые, что они не оказывают существенного влияния на стоимость) в пропорции, заключённой между соотношениями цен.

Отсюда легко вывести, что для количества q_a блага a, предлагаемого к обмену системой A, и количества q_b блага b, предлагаемого к обмену системой B, условия осуществимости обмена выполняются, т.е. обе системы в состоянии улучшить значения своих функций предпочтения посредством обмена. А этого не может быть, т.к. и A, и B — оптимальные системы.

Рассуждая аналогичным образом, можно показать:

- во всех системах $\overline{E}$, входящих в H_1, в которых отсутствует ресурс a, но имеется ресурс b, соотношение значений их индивидуальной стоимости не больше, чем в любой из систем, располагающих обоими ресурсами либо не располагающих только ресурсом b;
- в системах $\overline{E}$, входящих в H_1, не располагающих ни одним из этих двух ресурсов, соотношение значений их индивидуальной стоимости может быть любым.

В этих условиях любая элементарная система A, имеющая ресурс a, может обменять некоторое его количество на ресурс b только в пропорции стоимости этих благ в системах $\overline{E}$, располагающих обоими благами, либо вообще откажется от этой идеи. Если цена ресурса b выше, сделка теряет смысл для A, а если ниже — для её возможных партнёров.

Итак, если в H_1 исчерпаны возможности обмена, *каждая система $\overline{E} \in H_1$ в состоянии приобрести благо в обмен на другое в той же пропорции, что и любая другая $\overline{E} \in H_1$*. При этом не имеет значения:

- располагает ли она этим благом в данный момент;
- одинаковы или различны функции предпочтения систем $\overline{E}$.

Поскольку все сделки по поводу одного и того же блага совершаются по одной и той же цене, вместо p_a^A, p_a^B и т.п. в системе H_1 достаточно ввести в рассмотрение p_a, выраженную в единицах любого из ограниченных благ, имеющихся в ненулевом количестве хотя бы у одной из $\overline{E} \in H_1$.

Выраженная в единицах некоторого ограниченного блага i, величина p_a оказывается равной альтернативной стоимости[1] блага a, выраженной в i.

Далее стоимость дефицитных благ, формирующуюся в системе H_1 в состоянии оптимума по Парето, будем именовать *общей стоимостью* в отличие от индивидуальной стоимости благ для систем $\overline{E}$.

> Ненулевыми количествами любого блага обладают лишь те системы, в которых его индивидуальная стоимость совпадает с его же альтернативной стоимостью. Иное означает наличие резервов увеличения функции предпочтения.
>
> Динамический характер системы H_1 предполагает, что её состояние меняется во времени, что обусловливает нарушение равенства значений индивидуальной стоимости. Однако в соответствии с определением оптимальной системы, каковой является $\overline{E}$, обмены не занимают времени, и вследствие этого в любой наперёд заданный момент имеет место равенство стоимости в разных $\overline{E}$.

Ограничения на возможности обмена

Если элементарные системы не всегда в состоянии найти партнёра по обмену и осуществить обмен по взаимному со-

[1] Напомним, что под альтернативной стоимостью блага понимаются потери других благ, обусловленные необходимостью использования единицы данного блага.

гласию, то говорят о наличии ограничений на возможности обмена. Среди этих ограничений особо отметим:

- наличие у элементарных систем неполной информации о возможностях обмена;
- трансакционные издержки — потери, которые системы-партнёры несут вследствие обмена (обычно это затраты, которые необходимо понести, чтобы вступить в права собственника);
- требование осуществлять обмен благ только в заданных пропорциях;
- запрет обмена с теми или иными системами.

Хотя при наличии ограничений на обмен системы $\overline{E}$ достигают оптимума по Парето, значения индивидуальной относительной стоимости благ в разных $\overline{E}$, скорее всего, окажутся различными. Они могут совпасть, как правило, лишь случайно.

При централизованном распределении ресурсов закон образования стоимости зависит от способа распределения. Значения индивидуальной относительной стоимости благ в этом случае обычно оказываются различными. Однако если квоты ресурсов устанавливаются в размере фактического потребления при свободном обмене, то формируется единая относительная стоимость каждого блага — та же, что и при свободном обмене.

Если установлены квоты на все ресурсы, понятие оптимума по Парето оказывается неприменимым, поскольку в этом случае изменение состояния какой-либо элементарной системы не может повлиять на состояния других.

При квотировании определённой номенклатуры благ и свободном обмене остальными:

- достигается оптимум по Парето;
- сформируется общая стоимость свободно обмениваемых благ;
- общая стоимость остальных благ может сформироваться только при некоторых особых алгоритмах квотирования.

Резюме

1. Образование стоимости в системах, совместно использующих ресурсы, зависит от правил распределения ресурсов.

2. Для системы H_1, состоящей из оптимальных элементарных систем, реализующих свои собственные предпочтения и участвующих в распределении ресурсов путём свободного обмена, относительная стоимость любых двух благ оказывается одинаковой во всех системах, использующих эти блага в ненулевых количествах.

3. Если в системе H_1 единые для всех систем значения стоимости достигнуты, то:

- обмен пропорционально стоимости окажется единственно приемлемым решением для каждой элементарной системы;
- альтернативная стоимость благ оказывается одною и той же для всех элементарных систем;
- H_1 находится в состоянии оптимума по Парето.

4. При отсутствии свободного обмена стоимость благ оказывается одинаковой во всех элементарных системах только в частных случаях.

Библиографический список

1. Багриновский К.А. Основы согласования плановых решений. М.: Наука, 1977.

2. Баумоль В. Экономическая теория и исследование операций. М.: Прогресс, 1965.

3. Корнаи Я. Дефицит. М.: Наука, 1990.

4. Курс экономической теории / Под ред. проф. Чепурина М.Н., проф. Киселёвой Е.А. Киров, 1994. — С. 63-64.

5. Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1977.

6. Светлов Н.М. Системный анализ целей и его приложение к аграрному производству: Лекция по курсу «Общая теория систем и системный анализ» для студентов отделения «Математические методы и исследование операций в АПК». М., 1998.

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое оптимум по Парето?

2. Какие трудности возникают при оценке состояния системы H посредством линейной комбинации индивидуальных функций предпочтения её подсистем?

3. Какому подходу к оценке состояния многоэлементной системы соответствует исследование суммы стоимости индивидуальных целевых благ подсистем?

4. Что такое относительная стоимость?

5. Докажите, что если имеет место соотношение (2.30), то для двух систем выполняется условие осуществимости обмена.

6. С какой целью вводится предпосылка о выпуклости допустимых множеств элементов системы H?

7. Перечислите известные вам условия, при которых устанавливаются одинаковые значения относительной стоимости благ во всех системах, совместно использующих ресурсы.

8. В чём различие между системами H и H_1?

9. По каким ценам осуществляется обмен благами в системе H_1?

10. В каких случаях альтернативная стоимость блага для некоторой системы, использующей ресурсы совместно с другими, может отличаться от индивидуальной стоимости этого блага для этой же системы?

2.3. Согласование императивов поведения хозяйствующих субъектов

Оптимум по Парето как максимум совокупной стоимости целевых благ

Рассмотрим поведение системы H_1 при изменении интенсивностей поступления в неё ресурсов. Предположим, что дополнительное количество ресурсов $\Delta\mathbf{y}$, поступающих в H_1, обеспечивает улучшение состояния хотя бы одной из элементарных систем, не затрагивая интересы других. В результате H_1 переходит из предыдущего оптимума по Парето $\mathbf{X}_0$ в новый $\mathbf{X}_1$, причём с точки зрения принципа неухудшения $\mathbf{X}_1$ лучше, чем $\mathbf{X}_0$. Каждому состоянию $\mathbf{X}_1$, в которое можно перейти из $\mathbf{X}_0$, соответствуют:

- $\mathbf{p}_Z(\mathbf{X}_1)$ —вектор значений общей стоимости целевых благ всех элементарных систем, входящих в H_1 (считаем, что стоимость целевых благ выражена в некотором дефицитном благе);

- $\mathbf{f}(\mathbf{X}_1)$ — вектор выпусков целевых благ каждой из этих элементарных систем.

Имеющиеся у элементарных систем возможности обмена гарантируют, что

$$\langle \mathbf{p}_Z(\mathbf{X}_1), \mathbf{f}(\mathbf{X}_1) \rangle = \max_{\mathbf{f} \in F} \langle \mathbf{p}_Z(\mathbf{X}_1), \mathbf{f} \rangle, \tag{2.31}$$

где F — множество векторов выпусков целевых благ, возможных при объёмах ресурсов $\mathbf{y} + \text{Д}\mathbf{y}$, которыми располагает система H_1, и отношениях $q_{ik}(\mathbf{x}_k)$, присущих элементарным системам. Согласно (2.31), после обмена выпуск элементарными системами их целевых благ таков, что при установившихся в результате обмена значениях общей стоимости его совокупная общая стоимость, выраженная в любом дефицитном благе, максимальна. Совокупную стоимость целевых благ всех систем $\overline{E}$ в состоянии оптимума по Парето нельзя увеличить никаким актом обмена сверх уже осуществлённых, в том числе принудительным.

> Строго говоря, истинность этого утверждения гарантируется только в случае, когда допустимые множества всех элементарных систем имеют непустую внутренность (условие Слейтера). Из этого требования следует, в частности, что в моделях элементарных систем должны отсутствовать структурные ограничения, имеющие форму строгого равенства.

Верно и обратное утверждение. Если при заданных стоимостях целевых благ в некотором состоянии системы H_1 достигается максимум стоимости их совокупного выпуска, то это состояние — оптимум по Парето, а множители Лагранжа задачи максимизации равны значениям общей стоимости, соответствующим этому оптимуму по Парето.

> Это утверждение верно без дополнительных условий; более того, оно даже не требует соответствия элементарной системы задаче выпуклого программирования.
>
> Доказательства обоих утверждений используют:
>
> - факт совпадения функций Лагранжа задачи максимизации совокупной стоимости целевых благ, с одной стороны, условий оптимальности по Парето, с другой;

- теоремы, доказанные в работах Куна, Таккера, Удзавы, связывающие максимум функции Лагранжа с максимумом соответствующей экстремальной задачи.

Здесь мы для простоты не рассматриваем ситуации, когда стоимость некоторых благ не определена однозначно. Если это имеет место, всегда можно выделить группы таких благ, для которых однозначно определена *сумма* значений стоимости. Это следует из свойств допустимых множеств и функций предпочтения элементов системы H. Сформулированные выше утверждения можно распространить на случай неоднозначности значений стоимости, например, приняв не равной нулю стоимость только одного блага из группы.

Если целевое благо общее для всех элементарных систем, то, независимо от правил первоначального распределения ресурсов, сумма индивидуальных функций предпочтения равна максимальному количеству целевого блага, которое в состоянии выпустить система H_1.

Определить совокупную стоимость целевого блага системы H_1 при заданных $\mathbf{X}_0$ и $\mathbf{y} + \mathbf{Д}\mathbf{y}$ в общем случае невозможно, т.к. неизвестно, какой из оптимумов по Парето будет достигнут и какой $\mathbf{p}_Z$ образуется. Однако её можно *оценить*, если наряду с $\mathbf{X}_0$ задать некоторый вектор $\mathbf{p}_Z$ из числа соответствующих достижимым оптимумам по Парето. Тогда H_1 может быть рассмотрена как оптимальная система: при любых заданных $\mathbf{X}_0$, $\mathbf{y} + \mathbf{Д}\mathbf{y}$ и $\mathbf{p}_Z$ она выбирает такой $\mathbf{X}_1$, что имеет место (2.31), т.е. пребывает в состоянии оптимума по *вменённому* критерию «максимум совокупной общей стоимости индивидуальных целевых благ». Этот критерий имеет смысл только с точки зрения поведения системы: следование ему позволяет воспроизвести реальное поведение H_1. Будет ли на самом деле состояние, соответствующее большему значению критерия, более предпочтительным для H_1, или нет — неизвестно (и несущественно).

Вменённый критерий неизвестен до тех пор, пока не будет достигнут оптимум по Парето. Концепция вменённого критерия полезна только для теории. Она позволяет выяснить, какую роль играет индивидуальная стоимость на уровне экономики в целом, какое поведение она стимулирует, какие экономические решения считаются эффективными, если стоимость свободно образуется в процессе обмена. Но вменённые критерии оптимальности невозможно использовать для прогнозирования и планирования.

Вменённые предпочтения, определяющие поведение системы H_1, называются *общими предпочтениями* в отличие от *индивидуальных предпочтений* составляющих её систем $\overline{E}$. Соответствующие функции предпочтения называются *общими* и *индивидуальными* функциями предпочтения. Для H_1 функция предпочтения является вменённой.

Возможность выразить общую стоимость в любом благе означает возможность её измерения в единицах общественно необходимого труда. Замечание о значении труда как субстанции стоимости, сделанное на стр. 30, распространяется на экономическую систему, подобную H_1, т.е. состоящую из элементарных систем, действующих в общей ресурсной среде и принимающих экономические решения исходя всецело из собственных интересов.

Свойства общей стоимости

Из вышеизложенного следует, что стоимость благ одна и та же и в задаче (2.28), и в задаче

$$\begin{cases} \max \sum\limits_{k \in K} (p_{Zk} F_k(\mathbf{x}_k)); \\ F_k(\mathbf{x}_k) \geqslant Z_k,\ k \in K; \\ \sum\limits_{k \in K} q_{ik}(\mathbf{x}_k) \leqslant y_i\ ,\ i \in I; \\ x_{jk} \geqslant 0;\ j \in J,\ k \in K\ , \end{cases} \tag{2.32}$$

которая описывает поведение системы H_1, обусловленное вменёнными предпочтениями. Обозначения здесь те же, что и в (2.28), кроме $\mathbf{x}_k = (x_{jk})$ и p_{Zk} —стоимости целевого блага системы k.

Отличия задач (2.28) и (2.32) в том, что решение первой —множество состояний, оптимальных по Парето, а решение второй — подмножество множества оптимумов по Парето (возможно, совпадающее с ним), зависящее от выбора величин p_{Zk}. Задача (2.32), кроме того, непригодна для изучения обменов и образования общей стоимости.

Задача (2.32), в свою очередь, изоморфна задаче (2.1). Это позволяет нам, раз введено понятие вменённых предпочтений и, следовательно, выбраны величины p_{Zk}, рассматривать систему H_1 как разновидность системы $\overline{E}$. Общая стоимость предстаёт в виде *стоимости для системы* H_1, отражающей вменённые предпочтения, заданные целевой функцией задачи (2.32). С точки зрения её свойств неважно, что она образуется совсем иначе, чем стоимость в элементарной системе. Общая стоимость в (2.32) аналогична индивидуальной стоимости в системе $\overline{E}$ в том отношении, что:

- может служить единой мерой разнородных благ;
- устанавливает пропорции их взаимозамены, эквивалентные с точки зрения предпочтений моделируемой экономики (т.е. не влияющие на выпуск целевого блага);
- выступает нормативом эффективности относительно предпочтений, вменённых системе H_1.

Поэтому её следует рассматривать как *стоимость благ для моделируемой экономики*.

При ценах, равных множителям Лагранжа задачи (2.32), любой хозяйствующий субъект оказывается в состоянии реализовать все контролируемые им (находящиеся в его собственности или пользовании) излишки, которые могут быть использованы другими субъектами: у другого субъекта обязательно окажется возможность использовать каждое из благ этого излишка в производстве в обмен на имеющийся у него излишек. Выпуск целевого блага каждым из обменивающихся субъектов не уменьшится. При других ценах некоторые хозяйствующие субъекты оказываются не в состоянии реализовать некоторые количества благ, контролируемых ими, излишние с точки зрения их технологических возможностей (если только в процессе обмена цены не будут определённым образом изменяться). Это приводит к невозможности использовать ресурсы в оптимальных объёмах.

> В задачах оптимального планирования народного хозяйства, где целевая функция экономики задана и, как правило, по тем или иным причинам не согласована с предпочтениями хозяйствующих субъектов, можно говорить о вменённых предпочтениях элементарных систем — предпочтениях, которым должны следовать хозяйствующие субъекты, чтобы без наложения на них дополнительных ограничений обеспечить выполнение оптимального плана.

Свойство множителей Лагранжа обеспечивать осуществимость обменов в моделируемой экономике присуще любой задаче математического программирования, а не только (2.32). Л.В. Канторович, обратив внимание на эту особенность множителей Лагранжа (и, в частности, двойственных оценок ЗЛП), отмечал, что в задачах планирования они играют роль *оптимальных цен*. Оптимальные цены «лучше» других цен в том отношении, что обеспечивают выполнимость оптимального плана.

В связи с этим Л.В. Канторович рассматривал управление ценами в плановой экономике с целью достижения их соответствия оптимальным ценам как необходимый элемент реализации оптимального плана на региональном, отраслевом и народнохозяйственном уровнях управления. Академик В.С. Немчинов, признавая важное экономическое значение объективно обусловленных оценок благ, не соглашался с этим мнением. Он считал, что модели оптимального планирования не в состоянии описать процесс формирования общественно необходимых затрат труда в моделируемой экономике, а объективно обусловленные оценки обладают только некоторыми признаками, присущими ценам.

Стоимость в экономических системах с иерархической структурой

Предположим, что некоторые элементарные системы, входящие в H_1, состоят из самостоятельно функционирующих систем, подобных $\overline{E}$ (назовём их субэлементарными системами). Тогда верны следующие утверждения:

- каждая элементарная система, входящая в H_1 и состоящая из субэлементарных систем, может быть сама представлена в форме H_1;
- каждая такая система пребывает в состоянии оптимума по Парето;
- значения стоимости используемых благ одни и те же для системы H_1, любой элементарной и субэлементарной системы;
- альтернативная стоимость любого блага также одна и та же для всех этих систем.

Эти положения могут быть распространены на сколь угодно глубокие уровни иерархии. Они означают, что процесс согласования значений индивидуальной стоимости охватывает все уровни любой экономической системы, обладающей иерархической структурой, и на каждом уровне иерархии (кроме последнего) в процессе обменов формируются общая стоимость и вменённые предпочтения.

Синтез общей и индивидуальных функций предпочтения

Функция предпочтения — один из детерминантов стоимости. Чтобы выяснить связь стоимости с предпочтениями и изучить механизм её образования, мы считали функцию предпочтения известной. Обычно, наоборот, значения стоимости известны, а функции предпочтения — нет.

Предположим, что экономическая система находится в состоянии оптимума по Парето и, следовательно, оптимума в смысле вменённой функции предпочтения. Опираясь на условия оптимальности, мы можем установить форму общей (а значит, и индивидуальных) функций предпочтения, по крайней мере, в окрестности оптимума.

Чтобы упростить изложение, рассмотрим вместо H_1 систему H_2, имеющую вид

$$\begin{cases} \max \sum\limits_{k\in K} \sum\limits_{j\in J_k} c_{kj}\, x_{kj} \\ \sum\limits_{k\in K} \sum\limits_{j\in J_k} a_{ij}\, x_{kj} \leqslant y_i\,,\ i \in I; \\ x_{kj} \geqslant 0,\ \ j \in J_k\,,\ k \in K \end{cases} \qquad (2.33)$$

— вариант системы H_1, в котором все зависимости носят линейный характер. Опираясь на результаты, полученные выше (стр. 65), используем вменённую функцию предпочтения вместо индивидуальных. Обозначения в (2.33): I — множество благ в экономической системе; K — множество элементарных систем; J_k — множество технологических процессов, доступных элементарной системе k; x_{kj} — интенсивность процесса j в элементарной системе k; c_{kj} — коэффициент выпуска (затрат, если $c_j < 0$) целевого блага при единичной интенсивности процесса j в элементарной системе k; a_{ij} — коэффициент затрат (выпуска, если $a_{ij} < 0$) блага i при единичной интенсивности процесса j; y_i — запас в моделируемой системе (либо интенсивность поступления из среды) блага i.

Поскольку допустимое множество любой задачи выпуклого программирования можно со сколь угодно высокой точностью аппроксимировать при посредстве линейных ограничений, а целевую функцию заменить касательной к ней в точке оптимума, можно сформулировать ЗЛП, «почти эквивалентную» задаче выпуклого программирования. Как следствие, результаты анализа (2.33) можно распространить на систему H_1 в общей форме (2.28).

Задача (2.33) с математической точки зрения представляет собой ЗЛП. Она является частным случаем задачи (2.9). Поэтому (2.33) обладает всеми математическими свойствами системы E_1. Имеется, однако, принципиальное отличие в смысле модели: E_1 в экономических приложениях соответствует хозяйствующему субъекту — отрасли, фирме, индивидууму, смотря по степени детальности представления экономической системы; H_2 описывает функционирование совокупности хозяйствующих субъектов — экономической системы в целом.

Чтобы задача отыскания функций предпочтения была разрешимой, все балансы благ и структурные ограничения должны быть известны. Для определения коэффициентов линейной функции предпочтения вычисляют, пользуясь формулой $c_j = -\sum_{i \in I} a_{ij} p_i$, свободные члены ограничений двойственной ЗЛП, соответствующих базисным технологическим процессам. Для процессов, не вошедших в базис, значения коэффициентов функции предпочтения точно установить нельзя. О них известно лишь то, что они не превышают значений $\left(-\sum_{i \in I} a_{ij} p_i\right)$.

Установив вменённые предпочтения моделируемой системы, мы одновременно узнаём коэффициенты индивидуальных функций предпочтения[1] хозяйствующих субъектов всех уровней экономической иерархии.

Синтезированная функция предпочтения должна трактоваться только как закон *наблюдаемого* поведения. Этот закон может быть обусловлен иными факторами, нежели действительные предпочтения, а действие его, возможно, ограничено только моментом моделирования.

[1] Точнее, касательных к ним в данном оптимуме по Парето.

Резюме

1. В системе H_1 достигается максимум совокупной общей стоимости целевых благ элементарных систем.

2. Общая стоимость служит соизмерителем благ, обеспечивает сбалансированность обменов, характеризует эффективность использования благ с точки зрения предпочтений, вменённых экономической системе.

3. Для иерархически организованной экономики значения стоимости используемых благ одинаковы на всех уровнях иерархии.

4. Зная балансы и стоимость благ, а также структурные ограничения и значения соответствующих им множителей Лагранжа, можно установить форму общей и индивидуальных функций предпочтения в окрестности текущего состояния экономической системы.

Библиографический список

1. Багриновский К.А. Основы согласования плановых решений. М.: Наука, 1977.

2. Воркуев Б.Л. Анализ решений экономико-математических моделей. М.: Изд-во МГУ, 1987.

3. Канторович Л.В. Экономический расчёт наилучшего использования ресурсов. М.: Изд-во АН СССР, 1960.

4. Новожилов В.В. Проблемы измерения затрат и результатов при оптимальном планировании. М.: Экономика, 1967.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие особенности имеет экономическая система, в которой целевое благо одно и то же для каждой элементарной системы?

2. Чем общая функция предпочтения отличается от индивидуальной?

3. Почему нельзя предсказать значения стоимости индивидуальных целевых благ, образующиеся в результате обмена?

4. Обсудите социально-экономическое значение стоимости индивидуального целевого блага.

5. Что такое вменённые предпочтения?

6. Почему задача (2.32) непригодна для исследования процесса образования общей стоимости?

7. Перечислите известные вам свойства общей стоимости.

8. При каких условиях хозяйствующие субъекты могут реализовать все блага, которые будут использованы другими субъектами эффективнее с точки зрения общей функции предпочтения?

9. Почему результаты анализа системы H_2 можно переносить на систему H_1?

10. Какие коэффициенты функции предпочтения не удаётся точно определить при её синтезе в системе H_2?

2.4. Обусловленность стоимости технологическими факторами

Выше мы установили, что стоимость:

- образуется вследствие реализации хозяйствующими субъектами своих предпочтений;
- представляет собой меру вклада блага в реализацию предпочтений.

Это одна сторона содержания категории «стоимость». Другая состоит в том, что стоимость объективно связана с процессами производства. Образование стоимости — это не только распределение благ таким образом, чтобы их полезность оказалась пропорциональной для каждого использующего их хозяйствующего субъекта. Это и выбор определённых технологий их производства.

Для изучения связи стоимости с процессами производства благ мы используем модель «затраты-выпуск» и модель системы H_2. Обе модели линейные, что позволяет пользоваться сравнительно несложным математическим аппаратом линейной алгебры.

Модель межотраслевого баланса

Модель «затраты-выпуск», известная также как модель межотраслевого баланса или модель Леонтьева, обычно используется для решения задач планирования на народнохозяйственном или региональном уровнях. Она удобна для представления обобщённых сведений о технологических возможностях экономики.

В модели предполагается, что каждая отрасль экономики выпускает единственное благо, т.е. представляет собой *чистую отрасль*. Выпуск каждого продукта разделяется на две части: одна возмещает производственные затраты, другая, называемая *чистым выпуском*, используется на накопление и непроизводственное потребление. Чистый выпуск иначе называют *конечным потреблением*, а производственные затраты — *производственным потреблением*. Критериев предпочтения в модели нет: экономика представлена в форме системы, не обладающей свободой.

Математический аппарат данной модели впервые предложен российским экономистом В.К. Дмитриевым в 1904 г. Американскому учёному, лауреату Нобелевской премии В. Леонтьеву принадлежит приоритет в разработке методики построения числовой модели «затраты-выпуск» и многих направлений её анализа.

Математическая форма модели следующая:

$$x_i - \sum_{j \in I} a_{ij} x_j = y_i,\ i \in I, \tag{2.34}$$

где I — множество благ и, соответственно, однопродуктовых (чистых) отраслей; x_j — интенсивность производства в отрасли j; x_i — выпуск блага i, равный интенсивности производства в отрасли i; a_{ij} — величина прямых затрат блага i в расчёте на единицу интенсивности производства в отрасли j; y_i — величина чистого выпуска блага i.

Стоимостная интерпретация коэффициентов полных затрат

Основное требование к системе (2.34) — неотрицательность $\mathbf{x}$ при любом неотрицательном $\mathbf{y} = (y_i)$, что равносильно требованию *неотрицательной обратимости* матрицы $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$, где $\mathbf{A} = (a_{ij})$. Оно естественным образом выполняется для любой работоспособной экономической системы. В этом случае коэффициенты b_{ij} матрицы $\mathbf{B} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, называемые коэффициентами полных затрат[1], показывают, на сколько единиц должна увеличиться интенсивность отрасли j, чтобы обеспечить единичный прирост чистого выпуска блага i при неизменном выпуске других благ, т.е. $b_{ij} = \partial x_j / \partial y_i$.

Рассмотрим систему уравнений, двойственную по отношению к (2.34):

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{\mathrm{T}} \mathbf{p} = \mathbf{c}, \tag{2.35}$$

где $\mathbf{p} = (p_i)$ — вектор цен. При числовой реализации модели вектор $\mathbf{c} = (c_j)$ отождествляют с величинами прибылей (в денежном выраже-

[1] Здесь i — индекс блага — соответствует столбцу, а j — индекс отрасли — нумерует строку.

нии), выручаемых чистыми отраслями при единичных интенсивностях их функционирования. Можно рассмотреть компоненты этого вектора как величины производственного потребления некоторого блага, создаваемого в результате конечного потребления (т.е. вне производства).

Полагая, что **c** означает вектор прибылей, из (2.35) получаем:

- при известных **A** и **c** модель «затраты-выпуск» позволяет определить цены, обеспечивающие финансовую сбалансированность всех отраслей вне зависимости от интенсивности соответствующих производств;
- величины чистого выпуска не влияют на цены до тех пор, пока остаются верными предпосылки модели;
- модель «затраты-выпуск» не в состоянии объяснить величины прибылей, извлекаемых отраслями;
- величины p_i измеряются в единицах измерения прибыли (т.е. в денежных единицах) в расчёте на единицу блага.

Валовая прибыль всех отраслей при заданном **x** равна совокупной стоимости чистого выпуска: $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{y} \rangle$.

Система (2.35) позволяет дать стоимостную интерпретацию коэффициентам полных затрат b_{ij}. Они показывают, на сколько должна увеличиться цена p_i, чтобы прибыль отрасли j увеличилась на единицу, т.е. $b_{ij} = \partial p_i \,/\, \partial c_j$.

Сопоставив обе интерпретации коэффициентов полных затрат, получаем следующее утверждение, раскрывающее важную сторону смысла любых цен, обеспечивающих финансовую сбалансированность в экономической системе, соответствующей модели Леонтьева: цена блага, доставляющая отрасли единичную прибыль на единицу интенсивности её функционирования, численно равна интенсивности производства отрасли, обеспечивающей чистый выпуск единицы этого блага.

> Слово «численно» указывает на то, что эти две величины равны независимо от различия единиц измерения: интенсивность производства, обеспечивающая единичный выпуск блага, измеряется в единицах интенсивности отрасли на единицу блага (в качестве единицы интенсивности чистой отрасли естественно использовать количество выпускаемого ею блага), а цена — в денежных единицах на единицу блага.

Цену блага i можно определить по формуле $p_i = \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{c} \rangle$, где $\mathbf{b}_i$ — столбец матрицы $\mathbf{B}$, соответствующий благу i. Следовательно, при заданных величинах прибылей отраслей цена блага полностью определяется величинами интенсивностей производства, обеспечивающими единичный чистый выпуск этого блага. Чем большая интенсивность отрасли требуется для производства единицы блага, тем более высокая цена этого блага обеспечит единичную прибыль этой отрасли. Модель Леонтьева показывает, что величины цен непосредственно обусловлены производственными причинами.

Благодаря своей неотрицательности матрица $\mathbf{B}$ может быть представлена в форме бесконечного ряда:

$$\mathbf{B} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}^n, \tag{2.36}$$

где $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$ — матрица коэффициентов выпусков, $\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}$ — матрица коэффициентов прямых затрат, $\mathbf{A}^2$ — матрица косвенных затрат первого порядка (т.е. затрат, необходимых для выпуска эквивалента прямых затрат), $\mathbf{A}^3$ — матрица косвенных затрат второго порядка, необходимых для выпуска эквивалента косвенных затрат первого порядка, и т.д.

Коэффициенты выпуска, прямых затрат и косвенных затрат также имеют стоимостную интерпретацию. Коэффициенты $\mathbf{I}$ соответствуют единичной прибыли, $\mathbf{A}$ — величинам затрат отраслей на приобретение благ, представляющих собой натуральное выражение прямых затрат, $\mathbf{A}^2$ — величинам затрат отраслей на приобретение благ, представляющих собой натуральное выражение косвенных затрат первого порядка, и т.д. Таким образом, b_{ij} — это цена блага i, которая покрывает стоимость его прямых и косвенных затрат в отрасли j и приносит последней единичную прибыль.

Если вектор $\mathbf{c}$ выражает потребление чистыми отраслями блага, создаваемого в результате конечного потребления (обозначим это благо индексом h), то цена произвольного блага i измеряется в единицах блага h в расчёте на единицу блага i. Величины c_j в этом случае обусловлены только балансами благ, а цены имеют смысл нормы замещения блага i благом h. Относительная цена $p_{i'}/p_{i''}$ представляет собой норму замены блага i'' благом i'. Произведение $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle$ суть совокупное потребление блага h. Величина $\langle \mathbf{p}, \mathbf{y} \rangle$ означает совокупную стоимость конечного потребления, в результате которого создаётся благо h, следовательно, затраты на создание блага h. Равенство $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{y} \rangle$ в этом случае означает равенство затрат на создание блага h совокупной стоимости всего потреблённого количества этого блага.

Цены в модели «затраты-выпуск» не обязательно соответствуют стоимости. Это зависит от того, является ли вектор **c** результатом реализации закона поведения моделируемой системы.

Обобщения модели межотраслевого баланса

В стандартной модели межотраслевого баланса исследуются производственные возможности экономики по выпуску благ для личного потребления, непроизводственной сферы и накопления при условии, что на все остальные цели будет расходоваться технологически необходимый минимум благ. Изменяя правило выделения чистого выпуска (и, соответственно, возмещаемых затрат) из состава общественного продукта, можно получить целое семейство моделей, в математическом отношении изоморфных модели Леонтьева, но обладающих иным смыслом. Например, можно выделить в отдельную «чистую отрасль» производство трудовых услуг (всех или по видам) или включить капитальные вложения в состав прямых затрат. Те или иные правила зависят от цели исследования.

В таких моделях смысл и величины коэффициентов полных затрат оказываются иными, чем выше. Они включают в себя иной набор прямых и косвенных затрат; их величины не меньше, чем в стандартной модели, если новый вектор **y** не больше исходного, и наоборот. Но при любой спецификации чистого выпуска (т.е. правилах отнесения к нему некоторой части произведённых благ) соотношения $p_i = \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{c} \rangle$ будут по-прежнему выполняться для всех благ.

Баланс блага h, создаваемого в процессе конечного потребления, ничем не отличается от баланса любого другого блага. Значит, если имеет место (2.35), то

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}^i)^{\mathrm{T}}\mathbf{p} = \mathbf{a}_i\,, \tag{2.37}$$

где $\mathbf{a}_i$ — вектор коэффициентов прямых затрат некоторого блага $i \in I$ в рамках каждой чистой отрасли, $\mathbf{A}^i$ — матрица, полученная из $\mathbf{A}$ заменой строки $\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}$ строкой $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$. Это соотношение аналогично (2.35).

Хотя благо h создаётся за пределами производственной сферы, в математической модели оно ничем не отличается от других благ. Его особенности проявляются только на этапе интерпретации модели. Благо i производится, как и все остальные (исключая h), в процессе производства, но, тем не менее, мы можем вычислить матрицу $(\mathbf{I} - \mathbf{A_c})^{-1}$ и дать интерпретацию её коэффициентам в терминах произвольного блага i. Для этого блага, любого блага $k \in (I \cup \{h\}) \setminus \{i\}$ (независимо от его роли в экономической интерпретации) и любой чистой отрасли $j \in I$ имеют место соотношения

$$b^i_{kj} = \frac{\partial p_k}{\partial a_{ij}}\,,\;\; b^i_{kj} = \frac{\partial x_j}{\partial a_{ki}}\,, \tag{2.38}$$

откуда

$$\partial p_k = b^i_{kj}\,\partial a_{ij},\;\; \partial x_j = b^i_{kj}\,\partial a_{ki}\,. \tag{2.39}$$

Здесь b^i_{kj} — коэффициенты матрицы $(\mathbf{I} - \mathbf{A}^i)^{-1}$. Как видно из (2.39), они характеризуют зависимость интенсивности производства в отрасли j от величины прямых затрат блага k на производство блага i и одновременно — зависимость цены блага k от величины прямых затрат блага i на производство блага j. Цены в этом случае измеряются в единицах блага i. Выбор блага i не влияет на соотношения цен, но определяет их масштаб.

В классическом варианте модели межотраслевого баланса в качестве блага, создаваемого в результате конечного потребления, выступают деньги. Величины прибылей такая модель объяснить не в состоянии, поэтому, раскрывая существенные свойства цен, она не даёт исчерпывающего объяснения их величинам. Ситуация в корне меняется, если включить в модель только те блага, затраты которых носят объективный характер, соблюдая исчерпывающую полноту балансов каждого блага. Можно, например, выбрать в качестве блага h труд.

Он обладает свойствами, удобными для экономической интерпретации модели: создаётся в результате конечного потребления (вне сферы производства) и потребляется каждой чистой отраслью. В этом случае все параметры модели — производственные затраты, затраты труда, натуральный состав личного потребления — носят объективный характер, и цены всецело определяются этими параметрами.

> Модель, в которой в качестве блага h выступает труд, неудобна для целей планирования вектора **x** в зависимости от величины конечного потребления. Коэффициенты матрицы **A** в этом случае существенно зависят от объёмов производства чистых отраслей (компонентов вектора **x**), т.к. в этом случае разным **x** соответствуют разные величины капитальных вложений, а последние оказываются в составе a_{ij}.

Интерпретация обратной базисной матрицы ЗЛП

В ЗЛП существует зависимость двойственных оценок от коэффициентов системы неравенств и целевой функции, аналогичная зависимости цен от технологий, проявляющейся в модели межотраслевого баланса. Рассмотрим матрицу **A**, представляющую собой базис матрицы (a_{ij}), соответствующий оптимальному решению задачи (2.9). Оптимальный вектор базисных переменных **x** можно определить посредством матрицы $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ по формуле $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{y}$, где **y** — вектор свободных членов ограничений, вошедших в оптимальный базис. Коэффициенты b_{ij} матрицы **B**, где i нумерует столбец, а j —строку, имеют смысл, близкий к смыслу коэффициентов полных затрат в модели Леонтьева, т.е. означают изменение переменной i, обусловленное единичным изменением объёма ограничения j. Отличия следующие:

- в модели Леонтьева матрица **B** не зависит от **y** (правда, не при любом **y** модель имеет смысл), в то время как в ЗЛП при изменении **y**, превышающем пределы устойчивости оптимального базиса, происходит его замена, следовательно, **B** изменится;
- в ЗЛП коэффициенты матрицы **B** могут быть отрицательными.

Стоимостная интерпретация **B** вытекает из уравнения $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{c} = \mathbf{p}$, где **c** — вектор коэффициентов целевой функции, относящихся к переменным, вошедшим в оптимальный базис; **p** — двойственные оценки базисных ограничений. Коэффициент b_{ij} показывает, на сколько единиц должна увеличиться двойственная оценка блага i при увеличении коэффициента c_j целевой функции на единицу в пределах устойчивости оптимального базиса. Равенство значений целевых функций взаимно двойственных задач приобретает форму $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{y} \rangle$, уже встречавшуюся в модели межотраслевого баланса. Продолжает аналогию между двумя матрицами формула расчёта значения двойственной оценки $p_i = \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{c} \rangle$, где $\mathbf{b}_i$ — столбец матрицы $\mathbf{B}$, соответствующий ограничению i. Разложение матрицы $\mathbf{B}$ в ряд, однако, оказывается возможным только для некоторых частных случаев ЗЛП.

Рассмотрим две линейные модели, особенно интересные для нашего курса: H_2 (стр. 69) и основную задачу планирования (в линейной форме). Последняя подобна системе E_1 (стр. 31). Идентичность формы не случайна: при планировании вся экономика представляется как объект управления, реализующий единую цель, представленную целевой функцией модели. Если задача планирования предполагает развёрстку плана по исполнителям, то основная задача планирования приобретает более конкретную форму (2.33).

По имени её создателя основную задачу планирования (или только её линейный вариант) иногда называют задачей Канторовича.

Несмотря на сходство формы основной задачи планирования с формами систем E_1 или H_2, содержание их отличается принципиально. Первая отвечает на вопрос, как наилучшим образом реализовать цель, сформулированную планирующим органом. Вторая — в каком состоянии окажется элементарная система при заданных условиях. Третья ни на какие вопросы относительно будущего ответить не в состоянии, поскольку её целевая функция становится известной лишь тогда, когда цели элементарных систем, составляющих систему H_2, уже достигнуты. Для этого случая она позволяет выяснить императивы поведения хозяйствующих субъектов и изучить обусловленность стоимости технологическими факторами.

Различия в экономическом содержании трёх моделей полностью определяются различиями в смысле целевых функций.

В леонтьевской матрице $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ положительные коэффициенты означают выпуски, отрицательные — затраты. В E_1, H_2 и в основной задаче планирования смысл коэффициентов более сложен. Отрицательные a_{ij} (в H_2 — a_{ikj}) означают выпуски, положительные — затраты. Положительные y_i представляют собой поступления в моделируемую систему (их можно рассмотреть как выпуски технологического процесса «взаимоотношения со средой», всегда имеющего единичную интенсивность), отрицательные — наоборот. Положительные коэффициенты целевой функции означают выпуски, отрицательные — затраты целевого блага.

Каждый коэффициент b_{ij} (или b_{ikj} в системе H_2) показывает, насколько увеличится интенсивность технологического процесса j при увеличении интенсивности поступления в систему (или запаса) блага i на единицу в пределах устойчивости оптимального плана. Стоимостная интерпретация оказывается различной в каждом из трёх случаев. Величина коэффициента матрицы **B** показывает:

- в системе E_1 — на сколько единиц увеличивается индивидуальная стоимость блага i для данной системы при изменении её предпочтений, проявляющемся в увеличении коэффициента c_j целевой функции на единицу в пределах устойчивости оптимального базиса;
- в системе H_2 — на сколько единиц увеличивается общая стоимость блага i при изменении вменённых предпочтений, проявляющемся в увеличении коэффициента c_{kj} целевой функции на единицу в пределах устойчивости оптимального базиса;
- в основной задаче планирования — на сколько единиц должна увеличиться оптимальная цена блага i при изменении коэффициента c_j целевой функции на единицу в пределах устойчивости оптимального плана.

Матрица **A** для любой взаимной ЗЛП включает строку целевой функции исходной задачи. Коэффициенты b_{ij} взаимных задач суть величины прироста двойственной оценки ограничения i (которая, смотря по смыслу исходной задачи, может означать индивидуальную или общую стоимость, цену оптимального плана) при увеличении на единицу затрат блага, соответствующего целевой функции взаимной задачи, в производственном процессе j (если речь идёт о системе H_2 — в производственном процессе j элементарной системы k).

Наличие технологической и стоимостной интерпретаций одного и того же коэффициента в целом ряде микроэкономических моделей свидетельствует о наличии глубокой сущностной связи между материальным производством и законом стоимости.

Резюме

1. Коэффициент b_{ij} полных затрат модели «затраты-выпуск» представляет собой цену блага i, обеспечивающую отрасли j единичную прибыль в расчёте на единицу интенсивности функционирования.

2. Каждый коэффициент b_{ij} матрицы, обратной оптимальной базисной матрице ЗЛП, показывает, на сколько единиц должна возрасти двойственная оценка блага i при единичном росте коэффициента c_j целевой функции в пределах устойчивости оптимального базиса.

3. Двойственная оценка имеет смысл индивидуальной стоимости, если ЗЛП описывает элементарную систему; общей стоимости, если ЗЛП описывает систему H_2; цены оптимального плана, если ЗЛП представляет собой основную задачу планирования.

4. При заданных величинах прибылей цены в модели «затраты-выпуск» и двойственные оценки ЗЛП (в т.ч. стоимости в E_1 и H_2) зависят только от величин интенсивностей производства, необходимых для единичного чистого выпуска соответствующего блага.

Библиографический список

1. Вентцель Е.С. Введение в исследование операций. М.: Советское радио, 1964.

2. Волконский В.А. Модели оптимального планирования и взаимосвязи экономических показателей. М.: Наука, 1967.

3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / 3-е изд. М.: Наука, 1967.

4. Гранберг А.Г. Моделирование социалистической экономики: Учеб. для студ. экон. вузов. М.: Экономика, 1988. — С. 150-223.

5. Дмитриев В.К. Экономические очерки. М., 1904.

6. Зинченко А.П. Сельскохозяйственная статистика с основами социально-экономической статистики. М.: Изд-во МСХА, 1998. — С. 388-395.

7. Канторович Л.В. Экономический расчёт наилучшего использования ресурсов. М.: Изд-во АН СССР, 1960.

8. Коссов В.В. Межотраслевые модели (теория и практика использования). М.: Экономика, 1973.

9. Ланкастер К. Математическая экономика. М.: Советское радио, 1972.

10. Леонтьев В. Исследование структуры американской экономики. М.: Госстатиздат, 1958.

11. Немчинов В.С. Эконометрия // Академик В.С. Немчинов: Избранные произведения. М.: Наука, 1967. — Т. 3, с. 327-333.

12. Dorfman R., Samuelson P.A., Solow R. Linear Programming and Economic Analysis. McGraw-Hill, 1958.

Контрольные вопросы и задания

1. Охарактеризуйте экономический смысл коэффициентов полных затрат.

2. Какова стоимостная интерпретация матрицы $\mathbf{A}^2$ в модели «затраты-выпуск»? Обоснуйте эту интерпретацию.

3. Как определить цену в модели «затраты-выпуск», если заданы матрица $\mathbf{A}$, величины фактических прибылей и интенсивности производственных процессов всех отраслей?

4. Докажите, что цены в модели «затраты-выпуск» не зависят от чистых выпусков.

5. Почему p_i в модели Леонтьева в общем случае не представляют собой значения стоимости?

6. Можно ли перенести выводы модели «затраты-выпуск», касающиеся цен, на стоимость?

7. Каковы отличия между матрицами $\mathbf{A}$ в модели Леонтьева и в основной задаче планирования?

8. Чем отличается основная задача планирования от системы H_2? Что общего они имеют?

9. Какой смысл имеют отрицательные коэффициенты функции предпочтения в основной задаче планирования?

10. Дайте экономическую интерпретацию матрице, обратной оптимальной базисной матрице основной задачи планирования.

11. Какова стоимостная интерпретация матрицы, обратной оптимальной базисной матрице задачи, взаимной к модели системы H_2?

12. Рассмотрите критически утверждение «Исследуя ЗЛП, можно обосновать наличие объективной связи между стоимостью и интенсивностями технологических процессов».

Глава 3. Равновесие

Изучив предыдущую главу, мы с вами выяснили, как образуется стоимость и как она связана с технологиями, используемыми в экономике. Теперь перейдём к изучению её экономической *функции*, состоящей в обеспечении экономического равновесия. Сначала установим, какой должна быть экономическая система, чтобы равновесие в ней было возможно. Для этого используем модель Эрроу-Дебре — одну из конкретизаций модели Вальраса. Затем покажем, что система H_2 благодаря механизму обменов пребывает в состоянии равновесия постоянно. Наконец, выясним, при каких обстоятельствах состояние равновесия устойчиво, т.е. способно воспроизводиться в течение достаточно продолжительного времени. Решению этой задачи послужит модель расширяющейся экономики, созданная Дж. фон Нейманом, и родственные ей модели.

3.1. Функционирование конкурентной экономики по Вальрасу

3.1.1. Общая модель децентрализованной экономической системы

Гипотеза Л. Вальраса о равновесии

Следуя А. Смиту, многие специалисты по рыночной экономике убеждены, что ей присущ механизм согласования индивидуальных решений, независимо принимаемых хозяйствующими единицами в условиях частной собственности. Суть согласования в том, что при некоторых ценах каждый хозяйствующий субъект получает в своё распоряжение каждого блага не меньше, чем хотел бы иметь при данных ценах, принимая во внимание свой бюджет. *Равновесием* в самом общем случае называют состояние экономики, в котором такое согласование достигнуто; *равновесными ценами* — цены, при которых оно достигается. Более строгие определения равновесия и равновесных цен нам предстоит ввести ниже.

В 80-х годах XIX в. Л. Вальрас впервые поставил математическую задачу о возможности согласования индивидуальных решений путём выбора подходящих цен. Согласно его гипотезе, для построенной им математической модели, независимо от конкретных значений её переменных, всегда можно указать хотя бы один вектор равновесных цен. Подчеркнём: в математическую постановку задачи не входило описание механизма (алгоритма) определения таких цен.

Объект модели Л. Вальраса

Модель Вальраса вполне соответствует представлениям А. Смита и его последователей о внутреннем устройстве экономики, определяющем законы её функционирования. Она описывает экономику, в которой все блага находятся в частной собственности индивидуумов и вовлекаются в производство фирмами-производителями. Произведённые продукты потребляются собственниками на платной основе. Для каждого собственника-потребителя определены предпочтения, на основе которых он выбирает тот или иной набор благ для потребления.

Задан некоторый вектор цен. Фирмы-производители выбирают производственную программу таким образом, чтобы достичь максимальной прибыли при условии, что ресурсы и продукты оцениваются в заданных ценах. Прибыль производителей, измеренная в заданных ценах, распределяется между потребителями в заданной пропорции. Чтобы потребить наиболее предпочтительный набор благ, потребители вправе приобретать произведённые блага в пределах своей доли прибыли и обмениваться с другими потребителями в пропорциях, соответствующих заданным ценам. При этом несущественно, используется какое-либо платёжное средство для опосредования обмена или нет.

И потребители, и производители либо не в состоянии назначить цены, отличающиеся от заданных, либо не пользуются этой возможностью. Рынок, обладающий этим свойством при условии отсутствия других ограничений на обмен, называется *конкурентным рынком*[1], а экономика, в основе которой лежит конкурентный рынок, — *конкурентной экономикой*.

По замыслу Вальраса, моделируемая экономика полностью децентрализована, ей совершенно не присуща какая-либо форма централизованного управления действиями собственников и производителей. Модель вполне описывает такую экономику, однако её можно трактовать шире этого первоначального замысла, поскольку никаких предпосылок о происхождении цен модель не содержит. Они могут сложиться децентрализованно в результате игры неких рыночных сил, не описываемых в модели; могут быть установлены централизованно, актом некоторого управляющего органа; могут не установиться вообще.

В интерпретации модели ничто не препятствует рассмотрению в качестве потребителей-собственников не только индивидуумов, а в качестве производителей — не только фирмы. Более того, одного и того же субъекта рынка можно представить в модели в обоих качествах. Напротив, отождествление собственников и потребителей является существенной чертой модели: собственность выступает необходимым условием потребления.

Описываемая ниже модель в своих главных чертах совпадает с классическим вариантом Вальраса, отличаясь:

- формализованным описанием потребительского выбора, опирающимся на ординалистскую[2] теорию предпочтений, вполне сформировавшуюся только в XX в.;

---

[1] Название возникло потому, что это свойство присуще рынку, на котором действует очень большое количество конкурирующих продавцов и покупателей каждого товара, принимающих решение всецело исходя из собственных интересов. Однако в рамках модели Вальраса неважно, обязано это свойство своим существованием конкуренции или какой-либо другой причине.

[2] *Ординалистский* подход к предпочтениям допускает невозможность количественной оценки предпочтений (лишь бы из любых двух наборов благ можно было выбрать не худший), в отличие от *кардиналистского*, в рамках которого каждому набору благ ставится в соответствие число, характеризующее полез-

- более точным определением совместного распределения производства и потребления;
- конкретизацией бюджетного ограничения.

Блага

В моделируемой экономической системе имеется n различных благ, обозначаемых индексами $j = 1...n$. Каждому из них поставлена в соответствие неотрицательная цена p_j из вектора $\mathbf{p} = (p_j)$ цен всех благ.

Производители

В экономической системе действует m производителей, обозначаемых индексами $k = 1...m$. Для каждого производителя k задано *технологическое множество* Y_k, содержащее все технологические процессы, допустимые для данного производителя. Технологический процесс представляют в форме вектора, каждый из n компонентов которого означает *изменение запаса* блага j вследствие данного технологического процесса. Технологический процесс, выбранный производителем k, обозначают символом $\mathbf{y}^k = (y_j^k)$.

> Технологическое множество производителя никак не зависит от выбора других производителей. Каждый из них волен выбирать любой процесс, не заботясь о том, хватит ли ему ресурсов. Сущность равновесия в том и состоит, что при некоторых ценах процессы, наилучшие для каждого производителя, оказываются таковыми, что начальной собственности потребителей заведомо достаточно для их совместной осуществимости.

Прибыль производителя в большинстве вариантов модели определяется как

$$\pi_k = \sum_{j=1}^{n} p_j\, y_j^k = \langle \mathbf{p}, \mathbf{y}^k \rangle, \tag{3.1}$$

т.е. как совокупная стоимость всех изменений вследствие выбранного технологического процесса. Производитель осуществляет выбор производственного процесса на основе закона $\pi_k \to \max$.

ность. В частности, в главе 1, оценивая предпочтения систем посредством функции предпочтения, мы следовали кардиналистскому подходу.

Прибыль производителя зависит только от производства: предполагается, что весь продукт должен быть реализован. Основания для этого предположения будут рассмотрены ниже (стр. 95).

Потребители

В экономической системе действует l потребителей, обозначаемых индексами $i = 1...l$. Для каждого потребителя i заданы:

- *поле* предпочтений $(X_i, \succsim_i)$;
- вектор начальной собственности $\mathbf{a}^i = (a_j^i)$;
- вектор долей участия данного потребителя в прибылях производителей $\mathbf{б}^i = (\alpha_k^i)$.

Здесь X_i — *потребительское множество*, т.е. множество, на котором определены предпочтения данного потребителя. Оно состоит из наборов благ $\mathbf{x}^i = (x_j^i)$. Каждый из n компонентов вектора $\mathbf{x}^i$ означает количество соответствующего блага j, входящего в данный набор потребителя i. Символ $\succsim_i$ обозначает отношение упорядочения, заданное на множестве X_i. Каждый из n компонентов вектора $\mathbf{a}^i$ означает количество соответствующего блага j, имеющегося в собственности данного потребителя; каждый из m компонентов вектора $\mathbf{б}^i$ — долю данного потребителя в прибыли соответствующего производителя k.

Обычно предполагается, что прибыль каждого производителя без остатка распределяется среди потребителей:

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_k^i = 1, \; k = 1...m. \tag{3.2}$$

Это условие, кажущееся достаточно жёстким, не препятствует интерпретации модели в реальную экономику, где часть прибыли инвестируется фирмами. Действительно, фирму можно рассмотреть как одновременно собственника-потребителя, имеющего право на долю в прибыли, и производителя.

Форма связи между величинами α_k^i и размером вклада потребителя i в деятельность фирмы k не устанавливается — её может и вовсе не быть. Выводы, полученные при анализе модели, верны, если доли участия в прибыли заданы, и не зависят от причин, обусловивших величину долей.

Поле предпочтения потребителя i представляет собой множество X_i, упорядочиваемое бинарным отношением $\succsim_i$. Запись $\mathbf{x}_1 \succsim_i \mathbf{x}_2$ может быть прочитана «$\mathbf{x}_1$ не хуже с точки зрения потребителя i, чем $\mathbf{x}_2$». К отношению $\succsim_i$ предъявляются следующие требования.

1. Рефлексивность: $\mathbf{x} \succsim_i \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in X_i$;
2. Транзитивность: $\mathbf{x} \succsim_i \mathbf{y},\ \mathbf{y} \succsim_i \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{x} \succsim_i \mathbf{z} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X_i$;
3. Полнота: $\neg\,(\mathbf{x} \succsim_i \mathbf{y}) \Rightarrow \mathbf{y} \succsim_i \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X_i$.

Первое из них в экономической интерпретации означает, что каждый набор благ во всяком случае не хуже, чем он сам. Второе — что если один набор не хуже другого, а тот, в свою очередь, не хуже третьего, то первый не хуже третьего. Третье требование гласит, что если неверно, что один набор не хуже другого, то верно, что другой не хуже первого, и означает, в частности, что ни в одном потребительском множестве нет таких двух наборов, из которых нельзя выявить не худший.

Коль скоро введено отношение «не хуже», читатель сам легко сможет определить отношение $\precsim_i$ (не лучше). Отношение $\sim_i$ (равноценно) определяется как

$$\mathbf{x} \succsim_i \mathbf{y},\ \mathbf{y} \succsim_i \mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{x} \sim_i \mathbf{y} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X_i, \tag{3.3}$$

а при его посредстве можно без труда определить отношения $\succ_i$ (лучше) и $\prec_i$ (хуже). Можно доказать, что все эти отношения транзитивны, а рефлексивны все, кроме $\succ_i$ и $\prec_i$ (последние не рефлексивны ни для каких $\mathbf{x} \in X_i$).

Поле предпочтений является более общей концепцией, чем функция предпочтения, отображающая значения переменных системы на вещественное число. Чтобы можно было поставить в соответствие каждому набору благ вещественное число, характеризующее предпочтительность этого набора, отношение $\succsim_i$ должно быть непрерывным, а множество X_i — обладать связностью и иметь счётное всюду плотное подмножество (это утверждение называется *теоремой Дебре*). Эти свойства, в частности, имеют место, если X_i — множество векторов одного и того же порядка, состоящих из вещественных чисел, а любой $\mathbf{x} \in X_i$

делит это множество на два замкнутых подмножества, состоящих из элементов не лучше **x** и не хуже **x**.

Потребитель выбирает наиболее предпочтительный набор $\mathbf{x}^i$ из множества $X_i \cap B_i$, где

$$B_i = \{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \leqslant I_i\} \tag{3.4}$$

— множество наборов потребительских благ, удовлетворяющих *бюджетному ограничению*; I_i — величина бюджета данного потребителя, в большинстве постановок задачи определяемая следующим образом:

$$I_i = \sum_{j=1}^{n} p_j\, a_j^i + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^i\, \pi_k\,, \tag{3.5}$$

или, в векторной записи, $I_i = \langle \mathbf{p}, \mathbf{a}^i \rangle + \langle \mathbf{б}^i, \mathbf{p} \rangle$, где $\mathbf{p} = (\mathrm{p}_k)$.

Суть такого бюджетного ограничения: никто не может потребить набор благ, который сто́ит больше, чем принадлежащие ему начальная собственность и доля в прибылях производителей. Следовательно, предполагается:

- возможность продажи (обмена) части начальной собственности по заданным ценам с целью приобретения более предпочтительного набора благ;
- наличие прав на участие в прибылях, подобных возникающим в рамках акционерной формы собственности.

Набор $\mathbf{x}^i$ представляет собой индивидуальный *спрос* потребителя i. Предполагают, что начальная собственность всех потребителей, преобразованная процессом производства, поступает на рынок и заново раскупается потребителями.

Компоненты векторов $\mathbf{a}^i$ и $\mathbf{x}^i$ могут быть отрицательными (независимо от того, требует этого экономическая интерпретация модели или нет). Отрицательные компоненты вектора $\mathbf{a}^i$ могут трактоваться как задолженности, а вектора $\mathbf{x}^i$ — как трудовые услуги, поставляемые в обмен на потребление, или «антиблага» — отходы (и те, и другие обладают тем общим свойством, что чем их больше в потребительском наборе, тем менее он предпочтителен).

В рамках рассматриваемой модели не имеет значения, что происходит с потребляемыми благами: исчезают ли они вследствие акта потребления, превращаются ли в другие блага, остаются ли такими, как были.

Условия, ограничивающие интерпретацию модели

В модели децентрализованной экономики отсутствуют многие ограничения на возможность экономической интерпретации, присущие системе H.

Функция предпочтения, отображающая состояние элементарной системы на вещественное число, заменена отношением предпочтения. Оно упорядочивает возможные состояния элементарной системы даже в том случае, если функции предпочтения не существует в принципе. При таких обстоятельствах стоимость как количественно определённая величина не может быть выведена с той же лёгкостью, как в элементарных системах, составляющих систему H.

Свойства реального потребительского предпочтения относятся к предмету скорее психологии, чем экономики, и изучены не вполне. В частности, неизвестно, можно ли представить реальное предпочтение в форме функции.

Технологические множества заданы в гораздо более общей форме, чем в системах $\overline{E}$. В последних технологические множества всегда таковы, что их границы можно описать в форме функций.

Наряду с этими преимуществами модель Вальраса не лишена препятствий к экономической интерпретации.

- Модель Вальраса статична: она описывает один цикл функционирования экономической системы. Предполагается, что в индивидуальные технологические множества включены лишь те технологические процессы, которые могут быть полностью завершены в пределах одного цикла. Потребление осуществляется немедленно после производства или, по крайней мере, в пределах того же самого цикла.
- Модель не принимает во внимание стохастический характер процессов производства и потребления.
- В модели отсутствуют взаимозависимости состояний различных систем (экстерналии), которые могут иметь место в реальности.

- Модель не допускает индивидуальных векторов цен, соответствующих отдельным сделкам.
- Предполагается, что предпочтения производителей состоят только в максимизации прибыли, а доходы потребителей формируются только из выручки от реализации собственности и долей в прибылях производителей.
- Не допускается наличие благ вне собственности.
- Не допускаются никакие механизмы согласования, кроме ценового.

Приемлемость некоторых из этих ограничений (например, первых двух) с экономической точки зрения до сих пор остаётся гипотезой, другие оказываются приемлемыми не всегда (как, например, последнее). Однако даже с учётом этих ограничений данная модель остаётся наиболее общей из всех экономических моделей. Она в основных чертах воспроизводит функционирование рыночной экономики и позволяет осуществить плодотворный анализ её свойств.

В рамках данного пункта причины, по которым рыночные агенты строго разделены на производителей и потребителей, не очевидны. Задание предпочтений производителя в форме «максимум прибыли» в отличие от неконкретизированных предпочтений потребителей кажется недостаточным основанием для этого. Однако при дальнейшем изложении станет ясно, что требования, предъявляемые к множествам X_i и Y_k, различны.

Исследование условий *существования* равновесия предполагает введение в модель дополнительных условий и проверку гарантированного существования хотя бы одного состояния равновесия при этих условиях. Исследование механизмов, *гарантирующих достижение* равновесия, требует наложения ограничений столь жёстких, чтобы единственно возможным состоянием модели оказалось состояние равновесия. К сожалению, вряд ли может быть найден способ обнаружения всех возможных достаточных условий существования равновесия и достаточных условий достижения состояния равновесия. Процесс исследования модели идёт по пути поиска условий существования равновесия, возможно более приемлемых с экономической точки зрения.

Экономически приемлемых условий, гарантирующих равновесие в рассматриваемой модели, пока не сформулировано.

Резюме

1. Сущность проблемы равновесия состоит в изучении возможности, условий и механизмов согласования индивидуальных решений хозяйствующих субъектов, действующих в рыночной экономике.

2. При изучении стоимости как механизма согласования в децентрализованных экономических системах предполагается, что все хозяйствующие субъекты осуществляют обмен согласно одним и тем же ценам.

3. Экономика, в которой производители и потребители, принимая решения, предполагают, что цены вследствие принятых решений не изменятся, называется конкурентной.

4. Объектом модели Л. Вальраса является конкурентная экономика, основанная на частной собственности.

5. Л. Вальрас сформулировал гипотезу о том, что в децентрализованной конкурентной экономике, основанной на частной собственности, возможно состояние равновесия.

Библиографический список

1. Аллен Р. Математическая экономия. М., 1963.

2. Маленво Э. Лекции по микроэкономическому анализу. М.: Наука, 1985.

3. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972.

4. Walras L. Elements of Pure Economies. L., 1954.

5. Samuelson P.A. Foundations of Economic Analysis. Cambridge, Massachusetts, 1948.

Контрольные вопросы и задания

1. Почему в модели Вальраса предполагается, что обмен осуществляется по заданным ценам? Не противоречит ли это идее моделирования экономики как децентрализованной системы?

2. Рассмотрите критически следующее утверждение: «Предпосылка о единых ценах неприемлема, поскольку часто можно наблюдать разные цены на один и тот же товар в двух соседних магазинах».

3. Что понимается под согласованием индивидуальных решений в децентрализованной экономике?

4. Что такое равновесные цены?

5. Что такое конкурентная экономика?

6. Охарактеризуйте объект модели Л. Вальраса.

7. В чём состоит гипотеза Л. Вальраса?

8. Назовите причины, по которым возможности выбора технологического процесса производителем не ограничиваются вследствие выбора, осуществляемого другими производителями.

9. Дайте формальное определение отношений «не лучше», «лучше» и «хуже».

10. Пригодна ли, по вашему мнению, модель децентрализованной экономики для описания экономических процессов в системах, основанных на иной форме собственности, нежели частная?

11. Чем ограничен потребитель в выборе благ для потребления?

12. Какова связь между спросом и прибылью производителей в модели децентрализованной экономики?

3.1.2. Закон Вальраса

Совместное распределение производства и потребления

Вследствие независимого выбора производителями технологических процессов формируется *совокупный технологический процесс*

$$\mathbf{y} = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{y}^k. \tag{3.6}$$

Множество всех возможных совокупных технологических процессов образует *совокупное технологическое множество* Y.

Вектор

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{l} \mathbf{a}^i \tag{3.7}$$

представляет собой *совокупную начальную собственность*. Кроме совокупной начальной собственности, моделируемая экономика не располагает никакими запасами благ.

Вектор *совокупного предложения* формируется из вектора начальной собственности под влиянием изменений, обусловленных процессами производства, и представляет собой $\mathbf{a} + \mathbf{y}$.

Совокупный спрос представляет собой вектор-сумму спроса всех потребителей:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{l} \mathbf{x}^i. \tag{3.8}$$

Множество всех возможных векторов совокупного спроса обозначим символом X.

Модель не содержит никаких условий, из которых следовала бы неотрицательность векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{a} + \mathbf{y}$.

Согласно модели, производители не создают никакого спроса. Они вовлекают в производство ресурсы, принадлежащие потребителям.

Распределение производства и потребления происходит путём независимого выбора каждым производителем технологического процесса $\mathbf{y}^k$ из своего технологического множества Y_k, а каждым потребителем — потребительского набора $\mathbf{x}^i$ из множества X_i. Такое распределение может быть реализовано лишь в том случае, если

$$\mathbf{x} \leqslant \mathbf{a} + \mathbf{y}, \tag{3.9}$$

т.е. если *для каждого блага совокупный спрос не превышает совокупного предложения*. Иначе кто-то из потребителей не получит выбранного набора благ.

Совместным распределением производства и потребления в модели децентрализованной экономической системы называется $n\times(l+m)$-матрица[1] вида $(\mathbf{x}^1, ..., \mathbf{x}^i, ..., \mathbf{x}^l, \mathbf{y}^1, ..., \mathbf{y}^k, ..., \mathbf{y}^m)$, для которой выполняется условие (3.9), где $\mathbf{x}^i \in X_i$, $\mathbf{y}^k \in Y_k$, $i = 1...l$, $k = 1...m$.

В большинстве классических вариантов модели совместное распределение производства и потребления формулируется более жёстко: требуется выполнение равенства $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{y}$. Однако не для любых Y_k и $(X_i, \succsim_i)$ существует совместное распределение производства и потребления, обеспечивающее тождественное равенство спроса и предложения. В частности, равенство возможно, если поле предпочтений $(X_i, \succsim_i)$ любого потребителя i таково, что из $\mathbf{x}_{i2} \geqslant \mathbf{x}_{i1}$ следует $\mathbf{x}_{i2} \succsim_i \mathbf{x}_{i1}$, либо если допускается *свободное расходование* всех благ (т.е. для каждого блага производители имеют в своём технологическом множестве, наряду с любым технологическим процессом $\mathbf{y}$, процесс, отличающийся от $\mathbf{y}$ только большим потреблением этого блага).

Виды равновесия

Рыночным равновесием в модели децентрализованной экономической системы называют $n\times(l+m+1)$-матрицу вида $(\mathbf{x}^1, ..., \mathbf{x}^i, ..., \mathbf{x}^l, \mathbf{y}^1, ..., \mathbf{y}^k, ..., \mathbf{y}^m, \mathbf{p})$, где

[1] Т.е. матрица, состоящая из n строк и $(l+m)$ столбцов.

$\mathbf{x}^i \in X_i$, $\mathbf{y}^k \in Y_k$, $i = 1...l$, $k = 1...m$, для которой выполняется условие (3.9) и

$$\langle \mathbf{p}, |\mathbf{x} - \mathbf{a} - \mathbf{y}| \rangle = \mathbf{0}. \tag{3.10}$$

Условие (3.10) означает, что:

- цена любого блага, предложение которого избыточно, равна нулю;
- совокупная стоимость избыточного предложения в ситуации рыночного равновесия равна нулю.

Это условие, вводимое в модель децентрализованной экономики в форме аксиомы, фактически является следствием требования стоимостного баланса в экономической системе, существенного в любой экономической интерпретации. Действительно, если после того, как потребители выбрали наборы $\mathbf{x}_k$, а производители — планы $\mathbf{y}_k$, возникло избыточное предложение, стоимость которого больше нуля (меньше нуля она быть не может из-за (3.9) и неотрицательности цен), то в реальной экономике производители получат прибыль меньшую, нежели $\langle \mathbf{p}, \mathbf{y}^k \rangle$. Соответственно некоторые из потребителей не смогут получить причитающиеся им доли прибыли и оплатить наборы $\mathbf{x}_k$. В модели, однако, прибыль производителя зависит только от объёмов производства. Условие (3.10) гарантирует, что в случае наличия избыточного предложения прибыль производителей окажется равной величине $\langle \mathbf{p}, \mathbf{y}^k \rangle$. Тем самым обосновывается целесообразность отношения (3.1).

Конкурентным равновесием в модели децентрализованной экономической системы называют $n\times(l+m+1)$-матрицу вида $(\mathbf{x}^1, ..., \mathbf{x}^i, ..., \mathbf{x}^l, \mathbf{y}^1, ..., \mathbf{y}^k, ..., \mathbf{y}^m, \mathbf{p})$, где $\mathbf{x}^i \in X_i$, $\mathbf{y}^k \in Y_k$, $i = 1...l$, $k = 1...m$, для которой:

- выполняются условия (3.9) и (3.10);
- достигается максимум прибыли каждого производителя при ценах $\mathbf{p}$;
- достигается оптимум предпочтений каждого потребителя при заданных бюджетных ограничениях и ценах $\mathbf{p}$, т.е. для каждого

потребителя в его множестве $X_i \cap B_i$ не существует наборов, которые он мог бы предпочесть выбранному набору $\mathbf{x}^i$.

Из определения конкурентного равновесия следует, что оно является частным случаем рыночного равновесия, когда достигаются оптимумы предпочтений всех потребителей и максимумы прибыли всех производителей.

Вектором равновесных цен называется вектор $\mathbf{p}$, при котором достигается конкурентное равновесие. Компоненты этого вектора называются *равновесными ценами.*

Функции спроса и предложения

Чтобы понять, каким образом цены могут содействовать достижению конкурентного равновесия, рассмотрим зависимость величин индивидуального предложения и спроса от вектора $\mathbf{p}$. На предложение вектор $\mathbf{p}$ влияет потому, что изменяются величины прибылей, соответствующих различным технологическим процессам из технологического множества каждого производителя. На спрос — потому, что меняется бюджетное ограничение вследствие изменения совокупной стоимости начальной собственности, с одной стороны, величин распределяемой прибыли, с другой.

Индивидуальная функция предложения производителя k записывается следующим образом:

$$\mathbf{ш}^k(\mathbf{p}) = \{\mathbf{y}^k \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{y}^k \rangle = \max \langle \mathbf{p}, \mathbf{y}' \rangle, \mathbf{y}' \in Y_k\}. \quad (3.11)$$

Значение этой функции представляет собой, как видно из формулы, множество векторов $\mathbf{y}^k$, максимизирующих прибыль производителя k при заданном векторе цен $\mathbf{p}$.

Чтобы ввести индивидуальные функции спроса, нам потребуется *индивидуальная функция прибыли* производителя:

$$\mathrm{p}^k(\mathbf{p}) = \langle \mathbf{p}, \mathbf{ш}^k(\mathbf{p}) \rangle = \max \langle \mathbf{p}, \mathbf{y}' \rangle, \mathbf{y}' \in Y_k . \quad (3.12)$$

Значение этой функции — вещественное число, равное прибыли, приносимой производителю выбранным технологическим процессом $\mathbf{y}^k$.

Индивидуальные функции спроса возвращают множество векторов $\mathbf{x}^i$, наиболее предпочтительных для потребителя i в рамках его бюджетного ограничения при ценах $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{ц}^i(\mathbf{p}) = \{\, \mathbf{x}^i \mid \mathbf{x}^i \in X_i \cap B_i(\mathbf{p}),\ \mathbf{x}^i \succsim_i \mathbf{x}\ \forall \mathbf{x} \in X_i \cap B_i(\mathbf{p}) \,\}, \tag{3.13}$$

где $B_i(\mathbf{p}) = \{\, \mathbf{x} \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \leqslant I_i(\mathbf{p}) \,\}$ — множество потребительских наборов, удовлетворяющих бюджетному ограничению потребителя i при ценах $\mathbf{p}$ (смысл этой записи соответствует (3.4)), а

$$I_i(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^{n} p_j\, a_j^i + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^i\, \mathrm{p}^k(\mathbf{p}) \tag{3.14}$$

— скалярная функция величины бюджетного ограничения потребителя i от цен $\mathbf{p}$, полученная из (3.5) заменой постоянных цен на переменные, постоянных прибылей — на функции прибыли.

Функция совокупного предложения включает предложение со стороны как производителей, так и собственников, выставляющих на продажу начальную собственность. Она выглядит следующим образом:

$$\mathbf{ш}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{l} \mathbf{a}^i + \sum_{k=1}^{m} \mathbf{ш}^k(\mathbf{p}). \tag{3.15}$$

Функция совокупного спроса определяется как

$$\mathbf{ц}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{l} \mathbf{ц}^i(\mathbf{p}). \tag{3.16}$$

Функция совокупного избыточного предложения представляет собой разность между значениями функций совокупного предложения и совокупного спроса:

$$\mathbf{ч}(\mathbf{p}) = \mathbf{ш}(\mathbf{p}) - \mathbf{ц}(\mathbf{p}). \tag{3.17}$$

Названия всех функций, введённых выше, — дань традиции. Правильнее было бы назвать их отображениями, поскольку из предпосылок модели не следует, что при любом $\mathbf{p}$ эти функции имеют единственное значение. На деле они при некоторых $\mathbf{p}$ могут иметь более одного значения или не иметь ни одного.

Закон Вальраса

Согласно *закону Вальраса в широком смысле*, в модели децентрализованной экономики для любых $\mathbf{x} \in \mathbf{ц}(\mathbf{p})$, $\mathbf{y} \in \mathbf{ш}(\mathbf{p})$ и $\mathbf{p}$ имеет место соотношение[1]

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \geqslant \langle \mathbf{p}, \mathbf{y} \rangle \tag{3.18}$$

или, что то же самое, для любых $\mathbf{u} \in \mathbf{ч}(\mathbf{p})$ и $\mathbf{p}$ верно $\langle \mathbf{p}, \mathbf{u} \rangle \leqslant 0$.

Суть закона состоит в том, что если все производители и потребители находятся в состоянии оптимума, то стоимость совокупного спроса в модели децентрализованной экономической системы не превышает стоимости совокупного предложения, т.е. единственным источником спроса потребителей является распределённый доход. Это утверждение верно для любого возможного состояния децентрализованной экономики (значит, для любого наперёд заданного неотрицательного вектора цен $\mathbf{p}$), при котором все производители и потребители находятся в состоянии оптимума, вне зависимости от того, имеет ли место состояние равновесия или нет.

Закон Вальраса в узком смысле верен для ситуации конкурентного равновесия. Он утверждает, что для любых $\mathbf{x} \in \mathbf{ц}(\mathbf{p})$, $\mathbf{y} \in \mathbf{ш}(\mathbf{p})$ и $\mathbf{p}$

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{y} \rangle, \tag{3.19}$$

т.е. для любых $\mathbf{u} \in \mathbf{ч}(\mathbf{p})$ и $\mathbf{p}$ верно $\langle \mathbf{p}, \mathbf{u} \rangle = 0$. Это значит, что в состоянии конкурентного равновесия стоимость совокупного спроса равна стоимости совокупного предложения. Отсюда:

- единственным источником спроса потребителей является распределённый доход;
- единственным источником дохода является платёжеспособный спрос.

Закон Вальраса в узком смысле прямо следует из условия (3.10). Обратим внимание, что доказательства корректности этого условия ещё не было представлено; если предположить, что при известных условиях конкурентное равновесие в модели децентрализованной экономики недостижимо, то это условие оказывается некорректным, а закон Вальраса в узком смысле не действует. Наоборот, если для некоторых условий доказано существование конкурентного

[1] Согласно предпосылкам модели, $\mathbf{p} \geqslant \mathbf{0}$. «Любой $\mathbf{p}$» означает любой $\mathbf{p}$, соответствующий условиям модели.

равновесия, тем самым доказана и справедливость закона Вальраса в узком смысле.

Доказательство закона Вальраса в широком смысле несложно. Его имеет смысл привести здесь целиком, чтобы показать, насколько плодотворным может быть анализ функций совокупного спроса и предложения. Для упрощения математической формы приведённое доказательство записано в предположении, что каждому **p** соответствуют единственные векторы-значения функций совокупного спроса и совокупного предложения. Вне этого предположения последовательность доказательства остаётся тою же самой, ни один его шаг не изменится, но математическая запись окажется более громоздкой. Читатель может написать её самостоятельно или найти в рекомендуемой литературе.

Согласно бюджетному ограничению, для всех потребителей i

$$\langle \mathbf{p},\, \mathbf{ц}^i(\mathbf{p}) \rangle \leqslant I_i = \sum_{j=1}^{n} p_j\, a_j^i + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^i\, \mathrm{p}^k(\mathbf{p}) \tag{3.20}$$

или, в векторной форме,

$$\langle \mathbf{p},\, \mathbf{ц}^i(\mathbf{p}) \rangle \leqslant \langle \mathbf{p},\, \mathbf{a}^i \rangle + \langle \mathbf{б}^i,\, \mathbf{p}(\mathbf{p}) \rangle. \tag{3.21}$$

Суммируя по всем потребителям, имеем в левой части неравенства $\langle \mathbf{p},\, \mathbf{ц}(\mathbf{p}) \rangle$, а в правой —

$$\left\langle \mathbf{p}, \sum_{i=1}^{l} \mathbf{a}^i \right\rangle + \sum_{i=1}^{l} \left\langle \mathbf{б}^i, \mathbf{p}(\mathbf{p}) \right\rangle. \tag{3.22}$$

Используя (3.2), из (3.22) имеем

$$\left\langle \mathbf{p}, \sum_{i=1}^{l} \mathbf{a}^i \right\rangle + \sum_{k=1}^{m} \mathbf{p}^k(\mathbf{p}). \tag{3.23}$$

В соответствии с определениями индивидуальных функций предложения и прибыли $\mathrm{p}^k(\mathbf{p}) = \langle \mathbf{p},\, \mathbf{ш}^k(\mathbf{p}) \rangle$. Подставляя это выражение в (3.23) и вынося общий множитель **p** за знак скалярного произведения векторов, получаем в правой части неравенства $\langle \mathbf{p},\, \mathbf{ш}(\mathbf{p}) \rangle$. Тем самым справедливость закона Вальраса в широком смысле доказана.

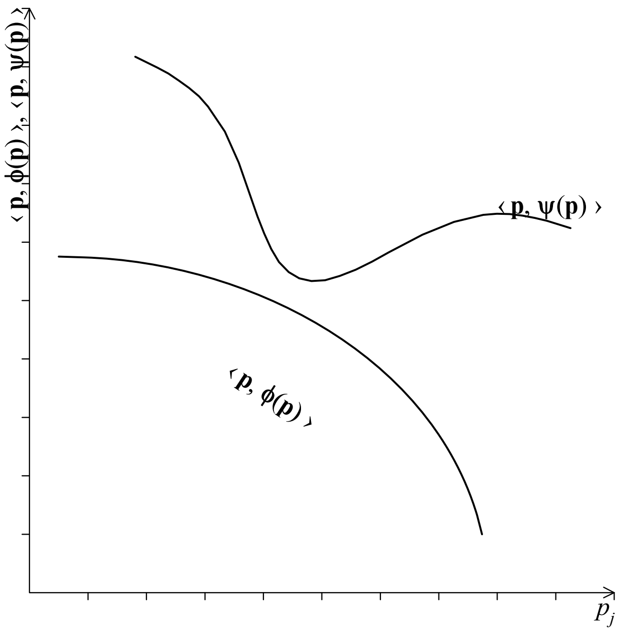

Рис. 2. Пример ситуации, когда конкурентное равновесие не достигается

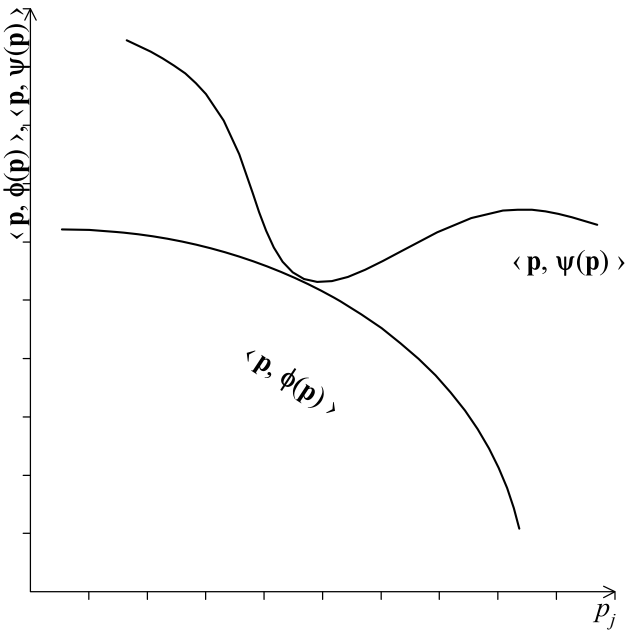

Рис. 3. Пример ситуации, когда конкурентное равновесие существует

Закон Вальраса и в широком, и в узком смысле верен независимо от наличия или отсутствия в моделируемой системе посредника обмена — денег, лишь бы выполнялись описываемые моделью правила обмена (по ценам **p**), формирования спроса и предложения. В частности, спрос должен быть обеспечен начальной собственностью и долями участия в прибылях.

На рис. 2 изображены пересечения графиков функций ‹ **p**, **ц**(**p**) › и ‹ **p**, **ш**(**p**) › с плоскостью, в которой значения всех цен, кроме p_j, постоянны. График функции ‹ **p**, **ц**(**p**) ›, согласно закону Вальраса в широком смысле, всегда расположен ниже ‹ **p**, **ш**(**p**) ›. В данном случае, как видно из графика, конкурентное равновесие не достигается (не исключено, что оно окажется достижимым при изменении других цен, а не только p_j). Рис. 3 отображает ситуацию, когда изменение p_j приводит к достижению конкурентного равновесия. На рис. 4 показана ситуация, которая не может сложиться, если выполняются бюджетные ограничения, поскольку существуют p_j, при которых стоимость совокупного спроса больше стоимости совокупного предложения. Форма графиков в рамках предпосылок модели может быть различной, существенно их взаимное расположение.

Знание закона Вальраса делает очевидным выбор метода доказательства существования конкурентного равновесия, которому посвящён п. 3.1.3. Для этого достаточно при заданных дополнительных условиях проанализировать функции совокупного спроса и совокупного предложения с тем, чтобы доказать, что при некоторых **p** выполняются условия (3.9) и (3.19).

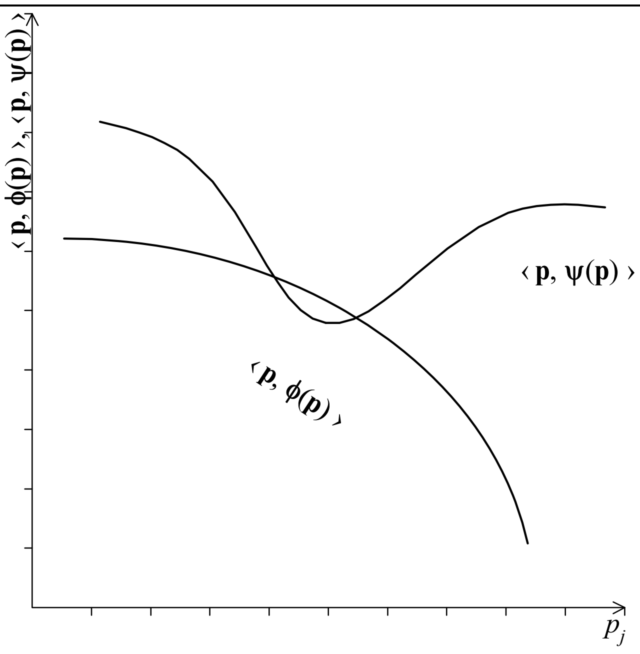

Рис. 4. Такая ситуация может возникнуть только при нарушении бюджетного ограничения

Резюме

1. Совместное распределение производства и потребления предполагает неотрицательный баланс предложения и спроса по всем благам.

2. Рыночное равновесие представляет собой совместное распределение производства и потребления, при котором стоимость избыточного предложения равна нулю.

3. Конкурентное равновесие — это рыночное равновесие при условии оптимума предпочтений каждого потребителя и максимума прибыли каждого производителя.

4. Согласно закону Вальраса, единственным источником совокупного спроса является распределённый между потребителями совокупный доход. В ситуации конкурентного равновесия, кроме того, единственным источником совокупного дохода является совокупный потребительский спрос.

Библиографический список

1. Ланкастер К. Математическая экономика. М.: Советское радио, 1972.

2. Левин М.И., Макаров В.Л., Рубинов А.М. Математические модели экономического взаимодействия. М.: Физматлит, 1993.

3. Макаров В.Л. Модели согласования экономических интересов: Учебное пособие. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1981.

4. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972.

5. Walras L. Elements of Pure Economies. L., 1954.

Контрольные вопросы и задания

1. Чем рыночное равновесие отличается от конкурентного равновесия?
2. Что такое функция совокупного избыточного предложения?
3. В чём суть закона Вальраса?
4. Верно ли утверждение «стоимость совокупного спроса равна стоимости совокупного предложения, следовательно, достигнуто состояние конкурентного равновесия»?
5. При каких условиях единственный источник совокупного спроса — распределённый доход?
6. В каких случаях распределённый доход становится единственным источником совокупного спроса?
7. Приведите пример, подтверждающий, что в модели децентрализованной экономики не всегда может быть достигнуто отсутствие избыточного предложения.

3.1.3. Модель Эрроу-Дебре. Теоремы о равновесии

Модель Эрроу-Дебре — частный случай модели децентрализованной экономической системы, для которого впервые было доказано существование конкурентного равновесия. Эта модель, несмотря на меньшую общность по сравнению с исходной, всё же вполне содержательна с экономической точки зрения. Используемые ниже обозначения (кроме особо оговорённых случаев) соответствуют обозначениям, которые применялись при описании основной модели децентрализованной экономической системы.

Аксиоматика модели Эрроу-Дебре

Наряду со всеми предпосылками основной модели, модель Эрроу-Дебре включает следующие ограничивающие условия.

1. Каждое индивидуальное потребительское множество X_i является выпуклым замкнутым подмножеством евклидова пространства R^n.

2. Каждое X_i имеет нижнюю грань.

3. Каждое отношение $\succsim_i$ является *выпуклым отображением* X_i в X_i, т.е. для соответствующего $\succ_i$ и любых $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 \in X_i$ имеет место

$$\mathbf{x}_2 \succ_i \mathbf{x}_1 \Rightarrow \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2 \succ_i \mathbf{x}_1, \tag{3.24}$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$.

4. Каждое отношение $\succsim_i$ является *непрерывным отображением* X_i в X_i.

5. Каждое технологическое множество Y_k содержит вектор $\mathbf{0}$.

6. Каждое Y_k выпукло и замкнуто в R^n.

7. Совокупное технологическое множество Y удовлетворяет условию

$$\mathbf{y} \geqslant \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{y} \notin Y. \tag{3.25}$$

8. Для совокупного технологического множества верно условие $Y \bigcap (-Y) = \{\mathbf{0}\}$.

Предположения о замкнутости множеств с экономической точки зрения несущественны.

> Если в предположении замкнутости существование конкурентного равновесия доказано, то без него конкурентное равновесие либо также существует, либо существует очень близкое к нему состояние. Состояние, очень мало отличающееся от равновесного, экономист, в отличие от математика, может считать равновесием на том основании, что ни один хозяйствующий субъект в реальной экономике не заметит различия.

Потребительское множество обычно можно считать выпуклым: если определены предпочтения по отношению к $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$, то по отношению к их выпуклой линейной комбинации они также, скорее всего, определены. А предположения 3 и 6 часто вступают в противоречие с экономическими реалиями.

Действительно, потребительские предпочтения не всегда выпуклы. Иногда совместное обладание двумя (или более) благами менее предпочтительно, чем любым из них в отдельности. Так случается, если несколько благ могут привести друг друга в негодность при взаимодействии. Технологические множества также не всегда выпуклы. Например, при наличии «экономии на масштабе», когда выпуск растёт опережающими темпами по сравнению с затратами, соответствующее Y_k оказывается невыпуклым, а такая ситуация весьма типична для реальной экономики. Она возникает из-за экономии на трансакционных издержках либо из-за принципиальной невозможности реализовать некоторые технологии в масштабах, меньших некоторого минимума (например, в химической промышленности, ядерной энергетике и т.п.).

Однако условия выпуклости, принятые в модели Эрроу-Дебре, не являются строго необходимыми для существования конкурентного равновесия. Например, Х. Удзава показал, для существования конкурентного равновесия достаточно выпуклости множества Y. Впоследствии были получены результаты для некоторых вариантов основной модели, вовсе не предусматривающих условий выпуклости.

Условие 2 вполне оправданно с экономической точки зрения. Вполне можно обойтись без включения в потребительское множество наборов, содержащих отрицательные количества благ[1], а в этом случае каково бы ни было X_i, оно непременно имеет неотрицательную нижнюю грань.

Известные проблемы для экономической интерпретации возникают в связи с условием 4. Часто реальные экономические блага оказываются неделимыми и, сверх того, могут встречаться в столь малом количестве, что неделимость нельзя игнорировать без ущерба существу дела. Из модели Эрроу-Дебре остаётся неясным, как присутствие подобных благ в реальной экономической системе сказывается на возможности достижения экономического равновесия. В работах Д. Гейла, А. Мас-Колелла, У. Шафера исследуются модели, в которых условие 4 отсутствует. Для таких моделей также удаётся указать условия, при которых конкурентное равновесие оказывается возможным.

---

[1] Труд и антиблага, о которых упоминалось на стр. 89, могут быть представлены как отрицательными, так и положительными значениями: ни одна из предпосылок модели не запрещает быть менее предпочтительным набору, в котором некоторого блага содержится больше, чем в другом, а остальных благ столько же.

Остальные условия, напротив, полезны с точки зрения экономиста, поскольку исключают варианты систем, соответствующих модели децентрализованной экономики, но заведомо не имеющих отношения к реальности. Поэтому их следует рассматривать не как ограничения, а как уточнения. Условие 5 гарантирует возможность бездействия каждому производителю — реальные производители располагает ею в действительности. Условие 7 запрещает производство благ из ничего. Наконец, условие 8 запрещает присутствие в совокупном технологическом множестве взаимно обратных процессов: невозможно вернуть результат технологического процесса к исходному состоянию, не понеся дополнительных затрат.

Условие 7 — экономическое следствие первого закона термодинамики (закона сохранения материи), а 8 — второго (закона возрастания энтропии замкнутых термодинамических систем).

Понятие «ненасыщаемость»

Точкой насыщения поля предпочтений $(X_i, \succsim_i)$ называется наиболее предпочтительный элемент множества X_i, т.е. $\mathbf{x}^i \in X_i$ такой, что для любого $\mathbf{x}' \in X_i$ имеет место $\mathbf{x}^i \succsim_i \mathbf{x}'$. В X_i может быть более одного наиболее предпочтительного элемента или такового может вовсе не существовать (для любого заданного $\mathbf{x}^i \in X_i$ найдётся $\mathbf{x} \in X_i$ такой, что $\mathbf{x} \succsim_i \mathbf{x}^i$). В последнем случае говорят, что потребитель i *ненасыщаем*. Ненасыщаемость потребителя может иметь место, например, если $\mathbf{x}^i \geqslant \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x}^i \succsim_i \mathbf{x}$, а X_i не имеет верхней грани (что соответствует предпосылкам рассматриваемой модели) либо не содержит ни одной своей граничной точки в R^n (чего в модели Эрроу-Дебре быть не может, поскольку X_i должно быть замкнутым).

Реального потребителя вполне можно рассматривать как ненасыщаемого потребителя. Значит, если какая-либо теорема имеет место только при условии ненасыщаемости потребителей, это нисколько не ограничивает её экономическую интерпретацию. Напротив, если теорема требует в качестве предпосылки, чтобы потребитель не был ненасыщаемым, она вряд ли может быть интерпретирована в реальную экономическую систему.

Виртуальные функции спроса и предложения

При исследовании функций спроса и предложения (совокупного и индивидуального) возникает проблема: при некоторых $\mathbf{p}$ множество их значений может оказаться пустым. Поэтому:

- выбирают достаточно большой конечный куб I в пространстве R^n (требования к его размеру описаны ниже);
- определяют *виртуальные функции предложения* в форме

$$\mathbf{ш}^k(\mathbf{p}) = \{\mathbf{y}^k \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{y}^k \rangle = \max \langle \mathbf{p}, \mathbf{y} \rangle, \mathbf{y} \in Y_k \cap I\}, \tag{3.26}$$

т.е. через максимум прибыли на множестве $Y_k \cap I$;

- определяют *виртуальные функции спроса*[1] в форме

$$\mathbf{ц}^i(\mathbf{p}) = \{\mathbf{x}^i \mid \mathbf{x}^i \in X_i \cap B_i(\mathbf{p}),\ \mathbf{x}^i \succsim_i \mathbf{x}\ \forall \mathbf{x} \in (X_i \cap B_i(\mathbf{p})) \cap I\} \tag{3.27}$$

через оптимум предпочтений на $X_i \cap I$.

Куб I должен быть достаточно большим, чтобы ему принадлежала точка $\mathbf{0}$, а его внутренности — любое из множеств[2]

$$\left\{\mathbf{x}^i \mid \mathbf{x}^i \in X_i, \left(\sum_{i'=1}^{l} \mathbf{a}^{i'} + Y - \sum_{s=1}^{i-1} X_s - \sum_{s=i+1}^{l} X_s - \mathbf{x}^i\right) \cap R_+^n = \varnothing\right\}, \tag{3.28}$$

$i = 1 ... l$,

$$\left\{\mathbf{y}^k \mid \mathbf{y}^k \in Y_k, \left(\sum_{i=1}^{l} \mathbf{a}^{i} - X + \sum_{t=1}^{k-1} Y_t + \sum_{t=k+1}^{m} Y_t + \mathbf{y}^k\right) \cap R_+^n = \varnothing\right\}, \tag{3.29}$$

$k = 1 ... m$.

Уравнения (3.28) и (3.29) описывают подмножества потребительских и технологических множеств, для которых выполняется условие (3.9). Поскольку это условие выполняется только внутри куба I, все состояния конкурентного равновесия заведомо принадлежат этому кубу. Можно доказать, что куб, имеющий конечные размеры и отвечающий требуемым условиям, заведомо существует.

---

[1] Множество $B_i(\mathbf{p})$ определено на стр. 97.

[2] Множество $X + Y$, где X и Y — множества векторов, определяется как $\{\mathbf{z} \mid \mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y},\ \mathbf{x} \in X,\ \mathbf{y} \in Y\}$. Запись $X + \mathbf{y}$, где X — множество, а $\mathbf{y}$ — вектор, эквивалентна записи $X + \{\mathbf{y}\}$.

Куб I может иметь любой размер, лишь бы он оставался конечным и целиком содержал множества, заданные формулами (3.28) и (3.29).

Множество $Y_k \bigcap I$ отличается от Y_k тем, что для первого всегда можно указать два вектора, между которыми заключены все его элементы, а для второго это может оказаться невыполнимым. То же касается множеств $X_i \bigcap I$ и X_i. Это отличие принципиально с точки зрения доказательства существования конкурентного равновесия.

На основе виртуальных функций спроса и предложения определяют виртуальные функции совокупного спроса, совокупного предложения и совокупного избыточного предложения. Форма этих функций та же, что и в общей модели. При любом $\mathbf{p} \geqslant \mathbf{0}$ виртуальные функции совокупного спроса, совокупного предложения и совокупного избыточного предложения имеют непустые множества значений. Это отличает их от функций, определённых в п. 3.1.2. Все виртуальные функции в случаях, когда значения исходных функций не выходят за пределы куба I, совпадают с исходными функциями.

Если посредством рассмотрения виртуальных функций удастся доказать существование конкурентного равновесия, тем самым будет доказано существование конкурентного равновесия в модели Эрроу-Дебре: в любом конкурентном равновесии, если оно существует, заведомо $\mathbf{x}^i \in X_i \bigcap I$ и $\mathbf{y}^k \in Y_k \bigcap I$ для всех i и k.

Все результаты, изложенные ниже, касаются только виртуальных функций. Чтобы не усложнять математическую запись, используем для них обозначения, которые ранее использовались для соответствующих исходных функций в общей модели.

Равновесие для функций совокупного предложения и совокупного спроса

Равновесием для функций совокупного предложения и совокупного спроса называют $n \times 3$-матрицу вида $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{p})$, где $\mathbf{x} \in \mathbf{щ}(\mathbf{p})$, $\mathbf{y} \in \mathbf{ш}(\mathbf{p})$, для которой выполняется условие $\mathbf{y} \geqslant \mathbf{x}$. С экономической точки зрения равновесие для функций совокупного предложения и совокупного спроса ничем не отличается от конкурентного равновесия, кроме того, что:

- матрица $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{p})$ не описывает совместного распределения производства и потребления, т.е. неизвестно, сколько потребляет каждый потребитель и сколько производит каждый производитель;
- не предполагается выполнение условия (3.10).

Положим, что заданы $n \times (l+m+1)$-матрица вида $(\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^i, \ldots, \mathbf{x}^l, \mathbf{y}^1, \ldots, \mathbf{y}^k, \ldots, \mathbf{y}^m, \mathbf{p})$, где $\mathbf{x}^i \in X_i$, $\mathbf{y}^k \in Y_k$, $i = 1 \ldots l$, $k = 1 \ldots m$, и $n \times 3$-матрица вида $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{p})$, где

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{l} \mathbf{x}^i \tag{3.30}$$

— совокупный спрос ($\mathbf{x} \in \mathbf{ц}(\mathbf{p})$), а

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{l} \mathbf{a}^i + \sum_{k=1}^{m} \mathbf{y}^k \tag{3.31}$$

— совокупное предложение ($\mathbf{y} \in \mathbf{ш}(\mathbf{p})$). Доказано, что между равновесием для виртуальных функций совокупного предложения и совокупного спроса и конкурентным равновесием существует взаимно однозначная связь:

- если матрица $(\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^i, \ldots, \mathbf{x}^l, \mathbf{y}^1, \ldots, \mathbf{y}^k, \ldots, \mathbf{y}^m, \mathbf{p})$, для которой $\mathbf{p} \geqslant \mathbf{0}$, представляет собой конкурентное равновесие, то $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{p})$ является равновесием для виртуальных функций совокупного предложения и совокупного спроса;
- если $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{p})$ — равновесие для виртуальных функций совокупного предложения и совокупного спроса, то любая матрица $(\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^i, \ldots, \mathbf{x}^l, \mathbf{y}^1, \ldots, \mathbf{y}^k, \ldots, \mathbf{y}^m, \mathbf{p})$, $\mathbf{p} \geqslant \mathbf{0}$, для которой выполняются равенства (3.30) и (3.31), представляет собой конкурентное равновесие.

Это утверждение имеет три существенных следствия. Перечислим их.

- Условие (3.10) в состоянии равновесия для виртуальных функций совокупного спроса и совокупного предложения непременно выполняется.

- В состоянии равновесия для виртуальных функций совокупного предложения и совокупного спроса выполняется закон Вальраса в узком смысле — условие (3.19).
- Если равновесие для виртуальных функций совокупного предложения и совокупного спроса существует, то существует и конкурентное равновесие.

Теорема о существовании неотрицательного избыточного предложения

Пусть P — *стандартный симплекс* в пространстве R^n, образованный всеми возможными векторами $\mathbf{p} \geqslant \mathbf{0}$, сумма компонентов которых равна единице; Г — произвольное компактное выпуклое подмножество пространства R^n; **з** — некоторое многозначное отображение P на Г, причём:

- отображение **з** замкнуто;
- при отображении **з** образом любой точки симплекса P является непустое выпуклое подмножество множества Г;
- $\langle \mathbf{p}, \mathbf{u} \rangle \geqslant 0$ для любого $\mathbf{u} \in$ **з**$(\mathbf{p})$.

Тогда существует такой $\mathbf{p} \in P$, что **з**$(\mathbf{p}) \bigcap R^n_+ \neq \varnothing$.

Эта теорема была доказана различными способами почти одновременно Д. Гейлом (1955 г.), Х. Никайдо (1956 г.), Ж. Дебре (1959 г.). Она носит сугубо математический характер и сама по себе не связывает никакие объекты модели Эрроу-Дебре. Однако если мы отождествим **з**$(\mathbf{p})$ с функцией совокупного избыточного предложения **ч**$(\mathbf{p})$ (распространив на неё сформулированные в условиях теоремы требования), то третье условие отождествляется с законом Вальраса в широком смысле, а заключение теоремы означает заведомое существование при выполнении упомянутых условий таких цен, при которых избыточное предложение не является отрицательным ни по одному благу.

Данная теорема продолжает линию доказательства существования конкурентного равновесия, начатую законом Вальраса и теоремой, устанавливающей связь конкурентного равновесия с равновесием для функций совокупного спроса и совокупного предложения. Раз равновесие для виртуальных функций совокупного предложения и совокупного спроса — достаточное условие существования конкурентного равновесия, задача сводится к доказательству существования равновесия для виртуальных функций совокупного предложения и совокупного спроса. Теоремой о существовании неотрицательного избыточного предложения указаны требования, при которых равновесие для этих функций заведомо достигается. Теперь осталось выяснить, отвечает ли данным условиям функция совокупного избыточного предложения модели Эрроу-Дебре; если да, то всегда или только в определённых случаях.

Теоремы о конкурентном равновесии

Ответ на этот вопрос дают три теоремы о конкурентном равновесии. Условия каждой них гарантируют выполнение условий теоремы о существовании неотрицательного избыточного предложения, а значит, и существование конкурентного равновесия в экономике Эрроу-Дебре.

Теорема 1. Если каждый потребитель i обладает такой начальной собственностью $\mathbf{a}^i$, что

$$\mathbf{a}^i > \bar{\mathbf{x}}^i \;\; \exists\, \bar{\mathbf{x}}^i \in X_i \cap I, \tag{3.32}$$

и все потребители ненасыщаемы, то в модели Эрроу-Дебре существует конкурентное равновесие.

Согласно теореме, достаточными условиями существования конкурентного равновесия в экономике Эрроу-Дебре являются:

- наличие у каждого потребителя в начальной собственности всех благ в количестве заведомо большем, чем включает хотя бы один его потребительский набор (т.е. каждый потребитель должен иметь возможность с избытком удовлетворить свои минимальные потребности[1] за счёт принадлежащих ему благ, не прибегая к обмену);

[1] Здесь выражение «минимальные потребности» используется не в строго математическом смысле: множество X_i может не содержать наименее предпочтительного элемента. Под минимальными потребностями подразумевается какой-либо потребительский набор *вне зависимости от того, насколько он предпочтителен* для данного потребителя, лишь бы он входил в его потребительское множество.

- ненасыщаемость каждого потребителя.

> Тот факт, что набор, соответствующий минимальным потребностям, должен содержаться не только в X_i, но и в I, нисколько не меняет экономическую интерпретацию теоремы, так как это требование (имеющее целью сделать применимым в доказательстве теоремы аппарат виртуальных функций спроса и предложения) легко выполняется при выборе достаточно большого куба I.

Для описания других возможных условий, гарантирующих существование конкурентного равновесия, введём понятия «благо, желательное для потребителя i» и «производительное благо».

Благо называется *желательным для потребителя* i, если для любого набора из потребительского множества X_i существует более предпочтительный с точки зрения отношения $\succ_i$ набор из того же множества, отличающийся от исходного только бо́льшим количеством данного блага. Иначе говоря, чем больше желательного блага в потребительском наборе при неизменном количестве других благ, тем этот набор предпочтительнее для данного потребителя вне зависимости от того, каковы другие блага, входящие в набор, и каково их количество. Обозначим символом D множество благ, каждое из которых является желательным для *каждого* потребителя.

> Очевидно, что если существует благо, желательное для потребителя i, то потребитель i ненасыщаем. Если $D \neq \varnothing$, то все потребители в экономике Эрроу-Дебре ненасыщаемы.

Благо h называется *производительным*, если для любого $(\mathbf{y} = (y_j)) \in Y$ существует вектор $(\mathbf{y}_0 = (y_{j0})) \in Y$ такой, что:

- для любого $j \neq h$ имеет место $y_{j0} \geqslant y_j$;
- существует $j \in D$ такой, что $j \neq h$, $y_{j0} > y_j$.

Говоря экономическим языком, если благо h производительное, мы в состоянии увеличить производство одного или нескольких благ, желательных для всех потребителей сразу, не уменьшая производство других благ, кроме блага h. В реальной экономике производительное благо при производстве других благ будет, скорее всего, расходоваться, хотя введённое здесь определение этого не требует: количество производительного блага при увеличении выпуска других благ может и увеличиваться, и оставаться неизменным, лишь бы оставалась в силе предпосылка 7 модели Эрроу-Дебре. Обозначим символом Q множество производительных благ.

Т е о р е м а 2. Конкурентное равновесие существует, если:

- в D входят все блага;
- каждый потребитель i обладает такой начальной собственностью $\mathbf{a}^i$, что
$$\mathbf{a}^i \geqslant \overline{\mathbf{x}}^i \ \ \exists\ \overline{\mathbf{x}}^i \in X_i \cap I; \tag{3.33}$$
- Существует $\mathbf{y} \in Y$ такой, что
$$\mathbf{y} + \sum_{i=1}^{l} \mathbf{a}^i > \sum_{i=1}^{l} \overline{\mathbf{x}}^i. \tag{3.34}$$

При этом ни одна из цен не будет нулевой.

Экономическая интерпретация условий существования конкурентного равновесия, сформулированных в этой теореме, следующая:

- все блага желательны для всех потребителей;
- каждый потребитель имеет в начальной собственности каждое благо в количестве не меньшем, чем включает хотя бы один его потребительский набор, и хотя бы одно благо в большем количестве (следовательно, каждый потребитель должен иметь возможность удовлетворить свои минимальные потребности за счёт принадлежащих ему благ, не прибегая к обмену);
- должна существовать возможность превысить совокупные минимальные потребности всех потребителей в каждом благе за счёт их собственности и производства.

Т е о р е м а 3. Конкурентное равновесие существует, если:

- $Q \neq \varnothing$;
- каждый потребитель i обладает такой начальной собственностью $\mathbf{a}^i$, что
$$\mathbf{a}^i \geqslant \overline{\mathbf{x}}^i,\ a_h^i > \overline{x}_h^i \ \ \exists\ \overline{\mathbf{x}}^i \in X_i \cap I,\ \exists\ h \in Q, \tag{3.35}$$

где $\overline{\mathbf{x}}^i = (\overline{x}_j^i)$, $\mathbf{a}^i = (a_j^i)$;

- существует такое совместное распределение производства и потребления, что

$$\mathbf{y} + \sum_{i=1}^{l} \mathbf{a}^i > \mathbf{x}. \tag{3.36}$$

Это означает, что достаточными условиями существования конкурентного равновесия являются:

- существование в экономической системе производительных благ (а значит, и благ, желательных для всех потребителей сразу);
- наличие у каждого потребителя в начальной собственности всех благ в количестве не меньшем, чем включает хотя бы один его потребительский набор, причём одно из производительных благ должно присутствовать в большем количестве;
- возможность с избытком удовлетворить совокупный спрос.

Рассмотрим условия теорем 1...3 с точки зрения применимости к реальной экономике.

Как отмечалось выше, предпосылка о ненасыщаемости потребителей, предполагаемая в теоремах, адекватна любой экономической системе, поэтому данное условие не ограничивает возможности интерпретации модели Эрроу-Дебре. Хотя в теоремах 2 и 3 эта предпосылка в явном виде не присутствует, она следует из того, что множество D благ, желательных для всех потребителей сразу, в обоих случаях должно быть непустым.

Каждая из рассмотренных теорем включает условия относительно размера начальной собственности, а теоремы 2 и 3 — сверх того, относительно совокупного предложения. Все они, вне зависимости от частных различий, утверждают, что каждый потребитель должен иметь возможность удовлетворить хотя бы свои минимальные потребности за счёт начальной собственности. Это условие имеет очевидный экономический смысл. Если оно не выполняется, потребитель может оказаться не в состоянии приобрести хоть какой-то набор благ из своего потребительского множества, т.е. пересечение его потребительского множества и множества наборов благ, отвечающих его бюджетному ограничению, может оказаться пустым. Условие, ограничивающее размер начальной собственности, гарантирует возможность удовлетворения хотя бы минимальных потребностей каждого потребителя независимо от того, имеет он доли в прибылях или нет. Различия между этими условиями вряд ли можно считать существенными с экономической точки зрения.

Математическая модель Эрроу-Дебре не содержит никаких предположений о том, по какому принципу наборы потребительских благ включаются в множество X_i. Наиболее очевидны следующие способы: а) в потребительское множество включаются все наборы потребительских благ, которые достаточны для обеспечения существования данного потребителя; б) потребительское множество формируется таким образом, чтобы обеспечить выполнение требований теорем 1...3. Предпочтения на наборах, не имеющих отношения к реальным предпочтениям потребителя, определяются формально таким образом, чтобы они оказались менее предпочтительными, чем любой из наборов, для которого определены предпочтения реального потребителя (если только при этом не нарушаются требования непрерывности).

Для экономической интерпретации естественен вариант (а), но тогда требования к размеру начальной собственности выглядят неоправданно жёсткими: в реальной экономике собственность потребителя может состоять лишь из денег, в то время как любой его потребительский набор заведомо включает не только деньги. Остаётся вариант (б), в котором утрачивается связь между необходимостью поддержания существования потребителей и рыночным равновесием: последнее может существовать даже в том случае, если некоторые потребители обречены погибнуть или нарушать права собственности других потребителей (именно так обстоит дело в реальной капиталистической экономике). Требования к потребительским множествам в теоремах 1...3 не ограничивают экономическую интерпретацию модели: фактически они гарантируют не конкурентное равновесие, а возможность совместного существования в экономике всех потребителей.

Первая предпосылка теоремы 2 нереалистична, поскольку в реальной экономике не все блага желательны для всех потребителей (на деле, например, спиртные напитки и даже свиные отбивные не отвечают этому требованию). Однако эта теорема позволяет установить, что при выполнении остальных предпосылок цена блага в условиях конкурентного равновесия может быть нулевой только тогда, когда хотя бы одно благо не является желательным для всех потребителей сразу.

В теореме 3 эта предпосылка заменена более мягкой предпосылкой о существовании в экономической системе хотя бы одного производительного блага. В этом случае в состоянии конкурентного равновесия могут существовать нулевые цены.

Теорема 1, если её предпосылки выполняются, гарантирует существование равновесия вне зависимости от производственных возможностей моделируемой экономики (лишь бы соблюдались предпосылки модели Эрроу-Дебре), а значит, даже в том случае, когда $Y = \{\mathbf{0}\}$ (производство невозможно).

Можно установить и другие достаточные условия существования конкурентного равновесия в модели Эрроу-Дебре, соответствующие некоторым специфическим экономическим системам, а иногда и вовсе не представляющие интереса для экономистов.

Как уже отмечалось, основной результат модели Эрроу-Дебре вследствие ряда жёстких предпосылок не допускает прямой интерпретации в экономическую систему. На его основе нельзя утверждать, что конкурентное равновесие заведомо возможно в капиталистической экономике. Тем более нельзя утверждать, что оно и в самом деле достигается. Значение модели Эрроу-Дебре в следующем:

- она позволяет установить, каким требованиям должна отвечать идеальная экономическая система, чтобы в ней существовало конкурентное равновесие;
- в ходе её анализа разработан метод доказательства существования конкурентного равновесия, который пригоден для исследования более общих моделей;
- полученные результаты позволяют ставить вопрос о том, насколько существенны отклонения от состояния конкурентного равновесия, присущие моделям, в которых условия его существования не выполняются, но которые интерпретируются в реальную экономику с меньшими оговорками, нежели исходная модель.

Существование принципиальной возможности согласования посредством ценового механизма не означает, что в реальной экономике используется именно этот механизм. Кроме того, если предположить, что согласование достигается посредством соответствующего выбора цен, остаётся открытым вопрос, существует ли механизм, обеспечивающий равенство реальных пропорций обмена равновесным ценам.

В системе H_1 согласование достигается, но не благодаря, а наряду с единой стоимостью. Каждые две системы, осуществляя обмен, вообще не принимают во внимание ничего, кроме стоимости блага для себя и согласия другой стороны. Процесс согласования в H_1 ближе к экономическим реалиям капиталистической экономики, чем согласование посредством выбора подходящих цен. Однако возможность стоимостного согласования является необходимым условием возможности согласования посредством свободного обмена, так как в результате этого процесса должны быть достигнуты равновесные цены.

Представление Вальраса о том, что равновесные цены управляют процессом согласования и, следовательно, возникают раньше равновесия, на многие годы определило развитие экономической теории. Открытие Л.В. Канторовичем единого процесса образования стоимости и распределения благ не привело к изменению устоявшихся представлений о роли цен в экономике, вследствие чего механизм формирования стоимостных пропорций, несмотря на его простоту, оставался неизученным ещё многие годы.

Резюме

1. Модель Эрроу-Дебре представляет собой частный случай модели децентрализованной экономической системы, предусматривающий дополнительные требования к потребительским множествам, отношениям предпочтения, технологическим множествам.

2. Равновесие для функций совокупного предложения и совокупного спроса и конкурентное равновесие взаимно обусловливают друг друга.

3. Для существования конкурентного равновесия в модели Эрроу-Дебре достаточно выполнения условий любой из трёх теорем о равновесии.

4. Из модели Эрроу-Дебре не следует существование конкурентного равновесия в реальной экономике.

Библиографический список

1. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. М.: Наука, 1980.

2. Келли Дж. Общая топология. М.: Наука, 1968.

3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.

4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968.

5. Ланкастер К. Математическая экономика. М.: Советское радио, 1972.

6. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972.

7. Debreu G. Theory of Value. N.Y.: Wiley, 1959.

Контрольные вопросы и задания

1. Что означает выпуклость отношения предпочтения?

2. Что с экономической точки зрения означает требование включения вектора **0** в технологическое множество каждого производителя?

3. Каковы, по вашему мнению, основания для того, чтобы рассматривать реального потребителя как ненасыщаемого?

4. Почему при исследовании условий существования конкурентного равновесия в модели Эрроу-Дебре используются виртуальные функции спроса и предложения?

5. Что такое равновесие для функций совокупного спроса и предложения?

6. Верно ли утверждение «при ценах **p** достигается равновесие для функций совокупного спроса и предложения, следовательно, вектор **p** является вектором равновесных цен»? Ответ обоснуйте.

7. Укажите условия, при которых в модели Эрроу-Дебре существует неотрицательное избыточное предложение.

8. В чём различие экономического содержания условий (3.34) и (3.36)?

9. Что понимается под производительным благом?

10. Какие условия существования конкурентного равновесия вам известны?

3.1.4. Равновесие в конкурентной системе с обменом

Оптимум системы H_2 (стр. 69), соответствующий оптимуму по Парето системы H_1, является состоянием конкурентного равновесия. Чтобы показать это, нужно продемонстрировать, что соотношения (3.9), (3.10) (стр. 94) и бюджетные ограничения хозяйствующих субъектов выполняются. Остальные условия конкурентного равновесия в ней выполнены (если оставить в стороне различие между производителями и потребителями): все хозяйствующие субъекты пребывают в состоянии оптимума.

Бюджетные ограничения хозяйствующих субъектов

Коль скоро речь идёт об оптимуме системы H_2, оптимум по Парето в H_1 уже достигнут и, следовательно, значения общей стоимости благ p_i

сформировались. Вменим каждому хозяйствующему субъекту k бюджетное ограничение в форме

$$\sum_{j\in J_k}\sum_{i\in I} a_{ij}\, p_i\, x_{kj} \leqslant \sum_{i\in I} p_i\, y_{ki}\ , \tag{3.37}$$

где y_{ik} — количество блага i, которым субъект k располагает в состоянии оптимума по Парето ($\sum_{k\in K} y_{ik} = y_i$ для всех $i \in I$), остальные обозначения соответствуют (2.33) на стр. 69. Согласно (3.37), бюджет хозяйствующего субъекта формируется из совокупной стоимости принадлежащих ему ресурсов (правая сторона неравенства) и расходуется на покрытие производственных затрат (левая сторона). Правила формирования и расходования бюджета в соответствии с (3.37), рассмотренные с точки зрения экономического содержания, отличаются от вальрасовских лишь отсутствием возможностей пополнения бюджета за счёт доли участия в прибылях производителей.

Оптимум по Парето — это состояние конкурентного равновесия

Пусть для H_2 имеет место

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (y_i),\\ \mathbf{x} &= \left(\sum_{k\in K}\sum_{j\in J_k}\frac{a_{ij} + |\,a_{ij}\,|}{2}\,x_{kj}\right),\\ \mathbf{y} &= -\left(\sum_{k\in K}\sum_{j\in J_k}\frac{a_{ij} - |\,a_{ij}\,|}{2}\,x_{kj}\right). \end{aligned} \tag{3.38}$$

Здесь $\mathbf{a}$ — совокупная начальная собственность хозяйствующих субъектов, $\mathbf{x}$ — совокупный спрос, $\mathbf{y}$ — объём внутреннего производства[1]. Остальные обозначения те же, что в (3.37). Таким образом, если верно (3.38), то блага могут поступить в моделируемую систему только за счёт внутреннего производства или из запасов хозяйствующих субъектов. Экономический смысл совокупного спроса и совокупного предло-

[1] Для любого q значение выражения $(q + |q|)/2$ равно q, если $q \geqslant 0$, а в противном случае — нулю; значение выражения $(q - |q|)/2$ равно q, если $q \leqslant 0$, иначе — нулю.

жения в этой трактовке отличается от принятого у Вальраса только тем, что здесь каждый хозяйствующий субъект может быть как производителем, так и потребителем.

Это не запрещает одним субъектам только производить блага, другим — только потреблять, как в вальрасовой модели.

Тогда выполняются, условия (3.9) и (3.10). Действительно, из математической записи балансов благ в (2.33) следует, что $\mathbf{x} - \mathbf{y} \leqslant \mathbf{a}$, т.е. $\mathbf{x} \leqslant \mathbf{a} + \mathbf{y}$, а это и есть (3.9). Условие (3.10) прямо следует из условия дополняющей нежёсткости.

Кроме того, соблюдаются бюджетные ограничения всех элементарных систем. В самом деле, коль скоро имеет место оптимум по Парето, каждая элементарная система k пребывает в состоянии

$$\begin{cases} \max \sum\limits_{j \in J_k} c_j\, x_{kj}\, ; \\ \sum\limits_{j \in J_k} a_{ij}\, x_{kj} \leqslant y_{ki},\ i \in I; \\ x_{kj} \geqslant 0,\ j \in J_k. \end{cases} \tag{3.39}$$

Из неравенств, описывающих балансы благ, прямо следует соблюдение бюджетного ограничения при любых неотрицательных p_i, а неотрицательность последних гарантируется условиями Куна-Таккера. Выполнение условий (3.9), (3.10) и бюджетных ограничений всех элементарных систем как раз обозначает рыночное равновесие.

Чтобы установить, присуще ли системе H_2 не только рыночное, но и конкурентное равновесие, необходимо выяснить, можно ли в рамках бюджетного ограничения (3.37) получить эффект, превышающий $\max \sum\limits_{j \in J_k} c_j\, x_{kj}$. Если бы такая возможность существовала, это означало бы, что существует пара элементарных систем, для которой выполняются условия осуществимости обмена (2.27). Это, в свою очередь, свидетельствовало бы о том, что оптимум по Парето, вопреки нашему предположению, ещё не достигнут. Следовательно, оптимум системы

H_2 представляет собой не только рыночное, но и конкурентное равновесие.

Экономическое содержание конкурентного равновесия в системе H_2

Равновесие в системе H_2 трактуется в строго определённом смысле. Если реальные бюджеты элементарных систем формируются по закону, отличному от (3.37), но вся система, представленная в форме H_2, пребывает в состоянии оптимума, то следует различать неравновесный фактический и равновесный теоретический бюджеты. Оптимум в этом случае достигнут, конечно, не за счёт свободного обмена, а термин «конкурентное равновесие» можно применять лишь в контексте фразы «если бы бюджетное ограничение имело форму (3.37)».

Интересно сопоставить (2.15) и (3.18), предположив, что в H_2 выпуск создаёт предложение, а необходимость затрат порождает спрос. Из сопоставления следует, что в H_2 выполняется закон Вальраса в широком смысле. Предоставляем читателю самостоятельно убедиться, что для оптимального плана оказывается верен закон Вальраса в узком смысле.

Вспомним, что система H_2 — это не более чем форма представления конкурентной системы с обменом, т.е. системы H_1. Это представление оказывается допустимым по следующим причинам:

- в состоянии оптимума по Парето конкурентная система может быть, как было показано на стр. 65, представлена в форме оптимальной системы;
- элементарные системы, представимые задачами выпуклого программирования, могут быть аппроксимированы задачами линейного программирования с любой заданной степенью точности.

Поскольку конкурентная система может достичь состояния оптимума по Парето в результате обменов (стр. 58), мы приходим к важному выводу: *вследствие свободных обменов в H_1 достигается конкурентное равновесие* — состояние, в котором, с одной стороны, каждая элементарная система, распоряжаясь своим бюджетом наилучшим, с её точки зрения, образом, никогда не столкнётся с недостатком ресурсов, а с другой, любой из ресурсов, имеющих стоимость, будет использован полностью.

Резюме

1. Оптимум по Парето конкурентной системы с обменом — это состояние конкурентного равновесия.

2. Состояние конкурентного равновесия в экономике, которая может быть представлена в форме H_1, может быть достигнуто вследствие обменов без какого-либо вмешательства извне.

Библиографический список

1. Гейл Д. Теория линейных математических моделей. М.: Иностранная литература, 1963.

2. Данциг Г.Б. Линейное программирование, его применения и обобщения. М.: Прогресс, 1966.

3. Канторович Л.В. Экономический расчёт наилучшего использования ресурсов. М.: Изд-во АН СССР, 1960.

4. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие дополнения к описанию системы H_2 позволяют отождествить оптимум с конкурентным равновесием? В чём их смысл?

2. Верно ли утверждение, что хозяйствующие субъекты в системе, представленной в форме системы H_2, пребывают в состоянии равновесия? Ответ обоснуйте.

3. Объясните, почему бюджет хозяйствующего субъекта принимается равным совокупной стоимости принадлежащих ему ресурсов.

4. Назовите основные этапы доказательства утверждения о том, что оптимум по Парето в H_2 представляет собой конкурентное равновесие.

5. Докажите, что в состоянии оптимума по Парето системы H_2 выполняется закон Вальраса.

6. Каковы основания для мнения, согласно которому конкурентное равновесие в реальной экономике может быть достигнуто в результате обменов?

3.2. Динамическое равновесие

В п.3.1 речь шла о том, что в реальной экономической системе существует состояние экономического равновесия и что в экономике есть механизмы, позволяющие это состояние достичь. Но потребности хозяйствующих субъектов нельзя удовлетворить раз и навсегда, они непрерывно возобновляются, а это предполагает непрерывное возобновление процессов производства и обмена. Встаёт новый вопрос: возможно ли (без внешнего вмешательства) такое поведение экономической системы во времени, которое представляло бы собой непрерывный процесс перехода из одного состояния равновесия в другое, чтобы экономическая система никогда не оказывалась в неравновесном состоянии? Если возможно, то при каких условиях? Существуют ли в экономике механизмы, обеспечивающие такое поведение?

Чтобы ответить на этот вопрос, мы рассмотрим вариант системы H_2 с динамической структурой и ряд моделей, относящихся к классу моделей Неймана-Гейла. Они значительно проще вальрасовских, не столь общие, но зато помогают исследовать связь динамического равновесия с максимально достижимым темпом роста экономической системы и выяснить условия, при которых экономика из любого наперёд заданного состояния стремится выйти на траекторию поведения, соответствующую некоторому динамическому равновесию.

Динамические модели, аналогичные модели Вальраса, в пособии не рассматриваются. Читателю предлагается принять на веру, что такие модели существуют, а существование равновесных траекторий поведения для этих моделей, как и в модели Эрроу-Дебре, гарантируется рядом дополнительных условий. Желающим разобраться в этом вопросе подробнее можно рекомендовать книги В.М. Полтеровича и С.А. Ашманова, приведённые в библиографическом списке.

Вариант системы H_2 с динамической структурой

Система H_2 с динамической структурой состоит из элементарных систем, оперирующих благами, существующими в различные периоды времени. *Динамические технологические процессы*, присущие элементарным системам, предполагают, что в соответствии с технологией затраты и выпуски определённых количеств благ должны осуществляться в определённые моменты времени. Хотя непосредственно можно обмениваться только благами, существующими в один и тот же момент времени, ничто не запрещает обменять наличное благо на право использования другого блага в определённый момент времени в будущем.

Процессы хранения благ, благодаря которым блага перемещаются из заданного момента времени в более поздний (обычно следующий) ценой некоторых затрат, также входят в число динамических технологических процессов. С формальной стороны они ничем не отличаются от остальных.

Математическая запись динамического варианта системы H_2:

$$\begin{cases} \max \sum\limits_{k\in K} \sum\limits_{j\in J_k} c_{kj}\, x_{kj} \ ; \\ \sum\limits_{k\in K} \sum\limits_{j\in J_k} a_{itj}\, x_{kj} \leqslant y_{it} \ , \ i \in I, \ t \in T; \\ x_{kj} \geqslant 0, \ j \in J_k. \end{cases} \tag{3.40}$$

Здесь T — множество моментов времени, t —индекс момента времени; остальные обозначения имеют тот же смысл, что и соответствующие обозначения в (2.33).

Любому оптимуму по Парето системы H_1, в которой экономические системы имеют динамическую структуру, соответствуют некоторые c_{kj}, при которых имеет место оптимум в (3.40). Можно показать (как в п.3.1.4), что этот оптимум суть конкурентное равновесие. Но в (3.40) конкурентное равновесие охватывает не единственный момент, а период T. Оценки ограничений этой задачи представляют собой равновесные цены благ для каждого момента времени из T. Отсюда вывод: следуя своим императивам поведения и располагая полной информацией о технологических возможностях в периоде T, элементарные системы в результате обменов и заключения контрактов на будущие поставки обеспечивают конкурентное равновесие в течение этого периода.

Динамический вариант системы H_2 даёт основание ввести в рассмотрение *динамическое равновесие* — конкурентное равновесие, предполагающее:

- сбалансированность благ в будущем;
- индивидуальные оптимумы *поведения* элементарных систем.

Модель фон Неймана — инструмент исследования динамического равновесия

Модель фон Неймана, называемая иначе моделью расширяющейся экономики, предназначена для изучения условий существования и свойств динамического равновесия.

Важнейшие результаты, полученные при посредстве модели расширяющейся экономики:

- уточнение понятия динамического равновесия;
- установление тождества между динамическим равновесием и траекторией максимального сбалансированного экономического роста;
- уточнение смысла экономической категории процента на капитал.

Модель построена немецким математиком Дж. фон Нейманом, одним из величайших учёных XX столетия, специалистом в области информатики и теории игр, предложившим архитектуру вычислительных систем, поныне используемую в ЭВМ. Впоследствии на основе идей фон Неймана Д. Гейлом, Р. Раднером, В.Л. Макаровым, А.М. Рубиновым и другими исследователями была разработана теория динамического равновесия.

Модель фон Неймана описывает экономическую систему, рассматриваемую с точки зрения её поведения в течение определённого промежутка времени. Для моделируемой экономики характерны следующие черты:

- технологические процессы могут иметь разную интенсивность;
- потребление ресурсов и выпуск продуктов в любом технологическом процессе пропорциональны его интенсивности;
- множество процессов и их технологические характеристики остаются неизменными в течение моделируемого периода;
- каждому благу соответствует неотрицательная цена, определяющая пропорции обмена благ и остающаяся постоянной в течение моделируемого периода (никаких других требований к цене не выдвигается);
- финансовая система обеспечивает возможность выручать ренту с имеющегося запаса блага.

В дальнейшем будем называть экономику, обладающую перечисленными свойствами, неймановской экономикой.

Модель расширяющейся экономики не принимает во внимание предпочтений хозяйствующих субъектов. В числе прочих результатов её исследование позволяет установить, какими должны быть индивидуальные предпочтения, чтобы динамическое равновесие могло существовать.

Математический аппарат моделей расширяющейся экономики, в которых явно вводятся в рассмотрение индивидуальные предпочтения, сложнее. С такими моделями можно познакомиться в рекомендуемой литературе.

> Предпосылка о неизменности технологических процессов в будущем определяет важную сторону смысла модели. Она нереалистична с точки зрения процессов, определяющих фактический экономический рост. Модель совершенно бесплодна, например, для целей прогнозирования. Но для исследования стоимости в состоянии динамического равновесия эта предпосылка вполне целесообразна: стоимость складывается в условиях, когда *будущие* изменения в технологиях попросту неизвестны. В порядке развития модели можно ставить лишь вопрос о том, в какой мере предвидение людьми возможных технологических изменений, имеющее место в реальности, влияет на соответствие результатов её анализа реальности.

Терминология модели фон Неймана

В отличие от ранее рассмотренных, модель расширяющейся экономики оперирует финансовыми категориями.

Рента суть денежный доход, приносимый некоторым запасом его владельцу в течение единичного промежутка времени.

Рентабельность — величина ренты с запаса, стоимость которого равна единице.

Норма ренты — отношение совокупной стоимости запаса вкупе с принесённой им рентой в момент времени $t+1$ к совокупной стоимости самого запаса в момент t. Равна величине рентабельности плюс единица. Норма ренты, которую принесёт к моменту $t+1$ запас блага i, имеющийся в момент t, обозначается символом $\beta_i(t)$. Если $\beta_i(t) = 1$, благо i не приносит ренты, сохраняя только собственную стоимость.

Валовая продукция (в стоимостном выражении) — совокупная стоимость всего выпуска продукции некоторым заданным множеством технологических процессов.

Чистая продукция (в стоимостном выражении) — разница между валовой продукцией и совокупной стоимостью затрат на её производство.

Во всех определениях предполагается, что совокупная стоимость измеряется в некоторых заданных ценах p_i.

Запись модели фон Неймана

Модель фон Неймана не описывает взаимоотношений моделируемой экономики с её средой, как это имеет место в системе H_2. Подобно моделям вальрасовского типа, она оперирует категорией запаса независимо от того, как он формируется: из среды или при посредстве технологических процессов. В модель фон Неймана включаются:

- m благ, обозначаемых индексом i, характеризующихся неотрицательными ценами p_i;
- n технологических процессов, обозначаемых индексом j, каждый из которых в любой момент времени $t \in T$ характеризуется неотрицательной интенсивностью $x_j(t)$.

Здесь T — множество моментов времени, составляющих в совокупности моделируемый период.

Каждый технологический процесс $(\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j)$ при единичной интенсивности преобразует вектор запасов благ $\mathbf{a}_j = (a_{ij})$ в вектор $\mathbf{b}_j = (b_{ij})$, причём компоненты каждого из этих векторов не могут быть отрицательными[1]. При заданной интенсивности $x_j(t)$ происходит преобразование $x_j(t)\,\mathbf{a}_j$ в $x_j(t)\,\mathbf{b}_j$. Блага $x_j(t)\,\mathbf{b}_j$ будут доступны для потребления в качестве ресурсов только в периоде $t+1$.

[1] Неймановская форма представления технологического процесса представляет собой изящное решение проблемы различия между потоками и запасами благ. Вектор $\mathbf{a}_j$ представляет собой величины запасов для функционирования технологического процесса с единичной интенсивностью, вектор $(\mathbf{b}_j - \mathbf{a}_j)$ — порождаемые этим процессом потоки.

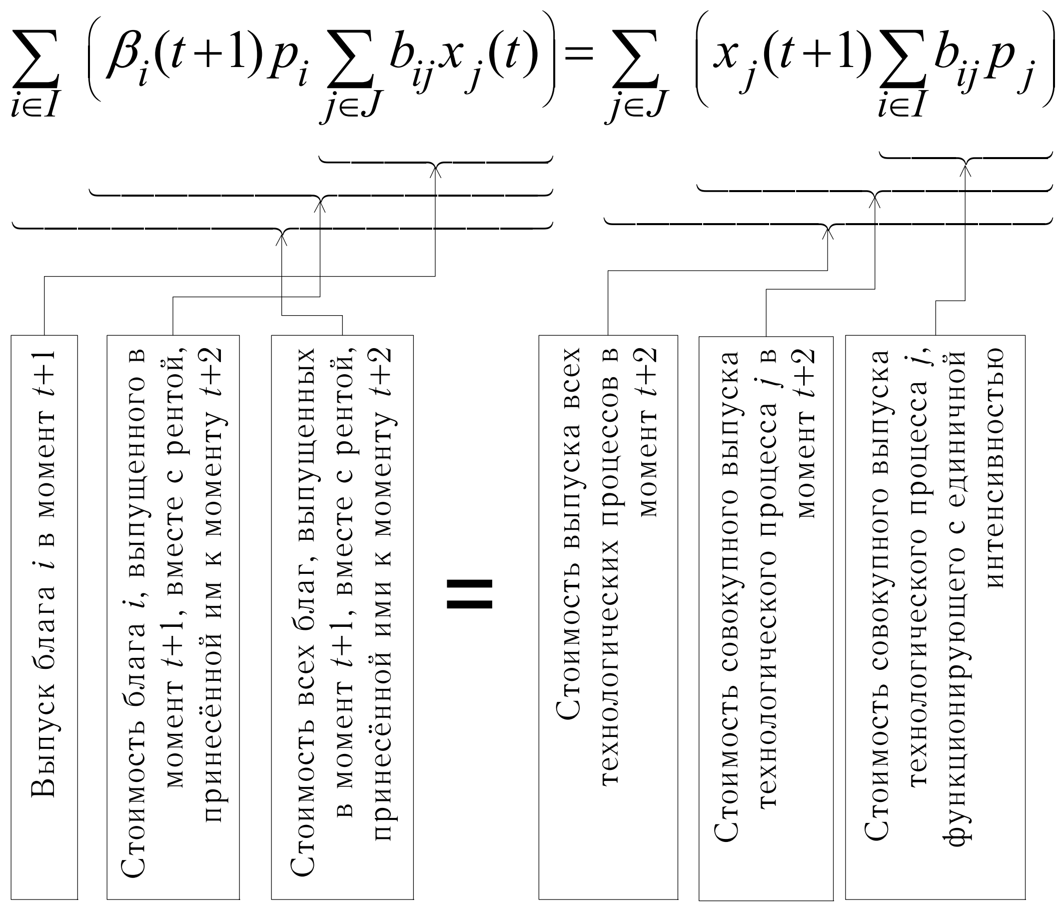

Рис. 5. Экономическое содержание связи ренты с совокупным выпуском в модели расширяющейся экономики

Моделируемой экономике присуща следующая связь между валовой продукцией и рентой с запасов, которыми располагает экономическая система:

$$\sum_{i\in I}\left(\beta_i\,(t+1)\;p_i\sum_{j\in J}b_{ij}\;x_j\,(t)\right)=\sum_{j\in J}\left(x_j\,(t+1)\sum_{i\in I}b_{ij}\;p_i\right). \qquad (3.41)$$

Экономическое содержание этой связи представлено на рис. 5. Как видим, стоимость *валовой продукции* технологических процессов, функционировавших в момент $t+1$ (т.е. доступных для потребления в момент $t+2$), представленная правою частью уравнения, равна стоимости благ, доступных для потребления в момент $t+1$, вкупе с рентой, принесённой ими к моменту $t+2$. Соотношение (3.41) представляет собой закон функционирования финансовой системы моделируемой экономики. Оно прямо следует из определения ренты.

Суть равенства подобна закону Вальраса в узком смысле (3.19). Отличие в том, что закон Вальраса — следствие предпосылок вальрасовской модели, а в модели фон Неймана само данное равенство является предпосылкой модели, исходной позицией анализа. Поэтому смысл модели Неймана, которая математически более проста, чем модель Вальраса, труднее поддаётся пониманию.

Следующая система неравенств описывает требования стоимостного баланса. В классическом варианте модели эти требования представлены в форме минимальных неотрицательных норм ренты на каждое благо $\beta_i(t)$. Для каждого процесса $j \in J$ в любой момент времени $t \in T$ должно иметь место

$$\sum_{i \in I} a_{ij}\, \beta_i(t+1)\, p_i \geqslant \sum_{i \in I} b_{ij}\, p_i\,. \tag{3.42}$$

Левая часть неравенства представляет собой стоимость благ $\mathbf{a} = (a_{ij})$ вместе с рентой, которую они принесут к моменту времени $t+2$ при условии, что норма ренты составляет $\beta_i(t)$. Правая — валовую продукцию технологического процесса при единичной интенсивности. Итак, в экономике, представленной в форме модели фон Неймана, нет ни одного технологического процесса, который создавал бы стоимость, превосходящую ренту с используемого им сырья. Существование такого процесса означало бы его неэффективность: рента, приносимая запасом, требуемым для его функционирования, должна была бы создаваться не этим процессом, а каким-то другим. Из (3.41) и (3.42) можно легко вывести, что запас некоторого блага i может быть использован не полностью только в том случае, если его цена p_i равна нулю, т.е. все блага используются эффективно. Неравенство (3.42) очень близко по смыслу к (2.10) на стр. 34.

В момент моделирования ($t = 0$) величины интенсивностей технологических процессов $x_j(0)$ заданы. Следовательно, заданы $x_j(0)\,\mathbf{b}_j$ — количества благ, доступные для использования в производственных целях в момент $t = 1$. Для всех последующих моментов интенсивности производственных процессов не могут быть такими, чтобы для их совместного функционирования не хватило какого-либо блага, имеющегося в экономической системе в момент $t \in T$:

$$\sum_{j \in J} a_{ij}\, x_j(t+1) \leqslant \sum_{j \in J} b_{ij}\, x_j(t),\ i \in I. \qquad (3.43)$$

Сверх основных производственных и стоимостных балансов предполагается:

- в каждом технологическом процессе хотя бы одно благо расходуется;
- для каждого блага имеется хотя бы один процесс (не обязательно используемый), в котором оно может быть произведено.

Математически это можно выразить так:

$$\begin{aligned} &\sum_{i \in I} a_{ij} > 0,\ j \in J; \\ &\sum_{j \in J} b_{ij} > 0,\ i \in I. \end{aligned} \qquad (3.44)$$

Условия (3.41)...(3.44) имеют силу для любого момента t в пределах периода моделирования. Они устанавливают связь между состояниями экономической системы в последовательные моменты времени.

Динамическое равновесие

Динамическим равновесием в модели фон Неймана называют структуру $(\mathbf{p}, \mathbf{x}(t), \alpha, \beta)$, $t \in T$, где $\mathbf{p} = (p_i)$, $\mathbf{x}(t) = (x_j(t))$, α и β — переменные, характеризующие соответственно рост производства и норму ренты[1], для которой выполняются условия (3.41)...(3.44) и, кроме того, соотношения

$$\beta_i(t) = \beta,\ i \in I,\ t \in T, \qquad (3.45)$$

$$x_j(t) = \alpha\, x_j(t-1),\ j \in J,\ t \in T \setminus \{0\}, \qquad (3.46)$$

причём хотя бы одна цена и интенсивность хотя бы одного технологического процесса не должны быть нулевыми. Поскольку в рассматриваемой модели цены и интенсивности технологических процессов неотрицательны, последнее требование можно представить в форме

$$\sum_{i \in I} p_i > 0,\ \sum_{j \in J} x_j > 0. \qquad (3.47)$$

[1] Экономическое содержание этих величин будет рассмотрено ниже.

Словом, равновесие в неймановской модели предполагает пропорциональный и постоянный во времени рост интенсивностей технологических процессов, с одной стороны, равную и постоянную во времени норму ренты, с другой[1].

> Ни одно из формальных требований к модели фон Неймана и к динамическому равновесию в ней не исключает возможности описания коллапсирующей экономической системы с $\alpha < 1$.

Условия динамического равновесия в модели фон Неймана значительно более жёсткие, чем в динамической разновидности системы H_2 (стр. 123). Чем же обусловлены эти требования, каков их экономический смысл? Динамическое равновесие по Нейману — это ситуация, которую ни один хозяйствующий субъект, действующий в моделируемой экономике, не пожелал бы изменить ни в данный момент, ни в сколь угодно удалённом будущем, если только не изменятся коэффициенты a_{ij} и b_{ij}, поскольку:

- ни один хозяйствующий субъект не сможет использовать свои ресурсы так, чтобы улучшить своё положение (увеличить норму ренты);
- никогда не окажется, что технологический процесс, обеспеченный необходимыми запасами в данный момент времени, испытает их недостаток когда-либо в будущем.

Для формального описания такой ситуации фон Нейману не пришлось моделировать хозяйствующие субъекты. Это позволило сделать модель столь простой в математическом отношении, что она поддалась математическому анализу до создания теории исследования операций и общей топологии.

> Ниже мы увидим, что эти условия, кроме экономического содержания, имеют совершенно определённый формальный (т.е. математический) смысл.
>
> Существуют более простые формулировки стоимостного баланса (3.42) и динамического равновесия, с экономической точки зрения эквивалентные классическим. Чтобы их получить, вместо норм ренты благ надо ввести в модель рентабельности технологических процессов. Попробуйте сделать это самостоятельно.

[1] Отсюда название «модель расширяющейся экономики».

Как показывает математический анализ системы (3.41)...(3.47), её решением является оптимум для системы ограничений (3.41)...(3.44) по критерию $\max \beta$ при дополнительном условии $\beta_i(t) \geqslant \beta$, т.е. максимум нормы ренты с наименее рентабельного блага. Если решения оптимизационной задачи не существует, неразрешима и система (3.41)...(3.47). Однако было доказано, что неотрицательность величин a_{ij} и b_{ij} гарантирует существование решения. В решении модели $p_i = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\alpha \sum_{j\in J} a_{ij}\, x_j(t) < \sum_{j\in J} b_{ij}\, x_j(t), \tag{3.48}$$

т.е. когда благо i не дефицитно. Аналогично, соотношение

$$\beta \sum_{i\in I} a_{ij}\, p_i > \sum_{i\in I} b_{ij}\, p_i \tag{3.49}$$

— необходимое и достаточное условие того, что процесс j не будет использоваться. Наконец, было доказано[1], что в состоянии динамического равновесия всегда имеет место соотношение $\alpha = \beta > 0$.

Отсюда следует, что неймановское динамическое равновесие существует только в экономике, которая подчиняется императиву максимизации нормы ренты в каждый момент времени либо какому-нибудь другому закону, обусловливающему поведение, которое можно объяснить при посредстве этого императива. Реальная экономика, как выяснится ниже, не может постоянно отвечать этому требованию, в ней часто возникает необходимость структурных изменений, которые можно осуществить лишь ценой снижения ренты.

> Это не отрицает значения модели фон Неймана: она призвана изучать экономическое содержание и свойства динамического равновесия, а не воспроизводить поведение экономической системы. Кроме того, вывод, согласно которому максимальная норма ренты соответствует динамическому равновесию, вообще не зависит от предпочтений, управляющих моделируемой экономикой, но только от соотношений (3.41)...(3.44).

---

[1] Фон Нейман доказал эти утверждения для частного случая своей модели, для которого $a_{ij} + b_{ij} > 0$, $i \in I$, $j \in J$. Для общего случая несколько различных доказательств было получено позднее другими авторами.

Смысл переменных p_i и β

В системе H_2 объективно обусловленные оценки благ имеют смысл количеств целевого блага, приносимых единицей данного блага. Благодаря этому они соответствуют пропорциям обмена — ценам. В модели расширяющейся экономики цены p_i, вычисляемые при решении задачи (3.41)...(3.44) по критерию max β, не могут рассматриваться как дополнительные выпуски целевого блага: увеличение количества некоторого отдельно взятого блага в состоянии динамического равновесия не может увеличить β. Хозяйствующие субъекты экономики, соответствующей модели фон Неймана, предпочли бы обмениваться благами по этим ценам по другой причине: только в этом случае каждая из сторон при обмене получает на единицу своего имущества ренту, не меньшую β.

Цены динамического равновесия представляют собой пропорции эквивалентного (равноценного) обмена и соизмерители ценности благ. Они могут быть выражены в единицах любого дефицитного блага, имеющегося в экономической системе.

> Цены в модели фон Неймана не связаны с предпочтением и поэтому не являются нормативами эффективности использования благ. Однако эти же цены являются нормативами эффективности в другой модели, явно описывающей те предпочтения хозяйствующих субъектов, следствием реализации которых является поведение, согласующееся с императивом максимизации нормы ренты.

Величина $(\beta - 1)$ представляет собой процент на капитал. Действительно, располагая некоторым количеством благ на сумму S, в экономике фон Неймана в следующем периоде мы будем располагать суммой βS, что равносильно тому, что на наши средства начислен процент в размере $(\beta - 1)S$. Величина $(\beta - 1)$ служит нормативом эффективности вложения средств (вне зависимости от их натурального состава, т.е. от того, какими благами являются эти средства): если некто вкладывает средства, рассчитывая получать менее $(\beta - 1)\times 100\%$ за каждый период, значит, он вкладывает средства неэффективно.

Величина β позволяет соизмерять стоимости, относящиеся к разным моментам времени. Если бы реальная экономика находилась в состоянии неймановского динамического равновесия и для неё удалось бы определить величину β, то именно это величину следовало бы использовать в качестве нормы дисконтирования при экономических расчётах. В самом деле, S в момент t и βS в момент $t+1$ равноценны в том смысле, что S к моменту $t+1$ тоже превратится в βS. Если между двумя моментами времени прошло n периодов, а не один, коэффициент соизмерения будет равен β^n.

Величина α, задающая одинаковый темп роста производства для всех технологических процессов, называется *темпом сбалансированного роста*. Равенство $\alpha = \beta$, установленное выше для состояния неймановского динамического равновесия, является динамическим эквивалентом условия (3.41). Оба они устанавливают связь между рентой и благами. Норма ренты равна темпу роста каждого используемого технологического процесса, а следовательно, темпу роста экономики в целом. Доказано, что темп сбалансированного роста, равный максимальной норме ренты, является максимально достижимым для экономической системы. Его называют *максимальным темпом сбалансированного роста.*

Для случая, описанного на стр. 46, процент на капитал специфичен для капитала конкретного вида. Одно из следствий максимального темпа сбалансированного роста, присущего динамическому равновесию в модели расширяющейся экономики, — равенство процента на капитал любого вида.

Легко убедиться, что темп сбалансированного роста равен темпу роста запасов любого дефицитного блага. В модели расширяющейся экономики процент на капитал равен темпу сбалансированного роста экономической системы вне зависимости от того, что имеется в виду под ростом экономической системы — рост производства или запасов.

Двойственность в модели фон Неймана

Состояние экономической системы фон Неймана в любой момент времени $t+1$ может быть описано при посредстве пары взаимно двойственных задач линейного программирования. Прямая задача —

$$\begin{cases} \max \sum\limits_{j \in J} c_j \, x_j(t+1) \, ; \\ \sum\limits_{j \in J} a_{ij} \, x_j(t+1) \leqslant \sum\limits_{j \in J} b_{ij} \, x_j(t) \, , \quad i \in I; \\ x_j(t) \geqslant 0, \; j \in J \end{cases} \tag{3.50}$$

— описывает материальные балансы. Она требует максимизации стоимости совокупного продукта при заданных значениях c_j стоимости чистого выпуска каждого технологического процесса единичной интенсивности, определяемых согласно формуле

$$c_j = \sum_{i \in I} b_{ij} \, p_i, \; j \in J. \tag{3.51}$$

Все остальные обозначения здесь те же, что и в (3.41)...(3.44). Величины $x_j(t)$ предполагаются заданными. В этой задаче неравенства представляют собой соотношения (3.43) модели фон Неймана, а целевая функция — правую часть выражения (3.41).

Двойственная задача выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \min \sum\limits_{i \in I} y_i(t) \, (\beta_i(t+1) \; p_i) \, ; \\ \sum\limits_{i \in I} a_{ij} \, (\beta_i(t+1) \; p_i) \geqslant c_j \, , \quad j \in J; \\ (\beta_i(t+1) \; p_i) \leqslant 0, \; i \in I. \end{cases} \tag{3.52}$$

Величины $y_i(t)$ связаны с начальными интенсивностями технологических процессов $x_j(t)$ формулой

$$y_i(t) = \sum_{j \in J} b_{ij} \, x_j(t), \; i \in I. \tag{3.53}$$

Поскольку $x_j(t)$ заданы, эти величины также являются константами.

Переменные двойственной задачи — величины $\beta_i(t+1) \; p_i$. Значения $\beta_i(t+1)$ легко вычисляются для p_i, удовлетворяющих (3.51). Минимизируется рента с благ, произведённых в периоде t, при условии, что стоимость чистого выпуска каждого технологического процесса (вне зависимости от времени) не меньше заданной.

Ограничения двойственной задачи представляют собой соотношения (3.42) модели фон Неймана, целевая функция — левую часть выражения (3.41).

Тождественность задач (3.41)...(3.44), с одной стороны, (3.50)...(3.52), с другой, следует из того, что уравнение (3.41) представляет собой условие равенства целевых функций прямой и двойственной задачи, т.е. условие оптимальности задач (3.50) и (3.52). Для оптимальных решений задач (3.50) и (3.52) должны выполняться их ограничения, а значит, соотношения (3.42)...(3.43) модели фон Неймана; сверх того, в соответствии с первой теоремой двойственности должно выполняться (3.41). Отсюда, в частности, следует, что условие (3.41) может быть выполнено тогда и только тогда, когда допустимая область задачи (3.50) не пуста. Это тут же влечёт существование непустой допустимой области задачи (3.52).

> Условие (3.44) не входит в явном виде в задачи (3.50) и (3.52). Однако, поскольку в него не входят переменные величины, а значения a_{ij} и b_{ij} одни и те же в (3.41)...(3.44) и в (3.50)...(3.52), оно всегда выполняется для пары взаимно двойственных задач, описывающих экономику фон Неймана.

Из представления модели фон Неймана в форме (3.50)...(3.52) следует: если некоторая экономика соответствует этой модели, то независимо от того, находится моделируемая экономическая система в состоянии динамического равновесия или нет, она всегда может быть представлена в форме оптимальной системы, поведение которой детерминируется целевой функцией задачи (3.50).

Задача (3.50)...(3.52) может рассматриваться как специфический частный случай динамического варианта системы H_2. Следовательно, на модель фон Неймана распространяются все положения, полученные при анализе экономической системы (в т.ч. обладающей внутренней иерархией элементарных систем), представленной в форме системы H_2.

По аналогии с парой задач (3.50)...(3.52) можно построить пару взаимно двойственных ЗЛП, описывающих поведение системы — объекта модели расширяющейся экономики в течение произвольного *промежутка* времени, а не только в момент t. Вследствие этого мы можем установить связь между динамическим равновесием в (3.50), понимаемым в смысле системы H_2, и динамическим равновесием в модели расширяющейся экономики. Второе является частным случаем первого, если c_j и y_i таковы, что выполняются соотношения (3.45)...(3.47).

Поведение хозяйствующих субъектов в состоянии динамического равновесия по Нейману, согласно (3.50), должно определяться совершенно конкретной функцией предпочтения. Отсюда, однако, не следует, что при других предпочтениях динамическое равновесие недостижимо. На самом деле, каковы бы ни были действительные предпочтения, в состоянии динамического равновесия поведение хозяйствующих субъектов оказывается возможным объяснить ещё и при посредстве предпочтений, соответствующих (3.50).

Хотя математически задачи (3.41)...(3.44) и (3.50)...(3.52) суть одно и то же, между ними есть два принципиальных различия. Во-первых, эти формы используются для достижения разных целей исследования. Во-вторых, их свойства исследуются разными методами. Форма ЗЛП позволяет установить условия соответствия экономической системы модели фон Неймана. Оригинальная форма позволяет исследовать закономерности экономического роста и свойства динамического равновесия в моделируемой экономике.

Резюме

1. Динамическое равновесие в модели фон Неймана предполагает:

- ненулевую интенсивность хотя бы одного производственного процесса;
- соблюдение натурального и стоимостного балансов во времени;
- равенство ренты и стоимости чистой продукции;
- неизменную норму ренты для всех благ в течение периода моделирования;
- постоянные темпы роста всех технологических процессов.

2. Темп роста, соответствующий динамическому равновесию в модели фон Неймана, имеет смысл процента на капитал.

3. Модель фон Неймана можно представить в форме пары взаимно двойственных ЗЛП.

4. Динамическое равновесие в модели фон Неймана предполагает динамическое равновесие в соответствующей ей системе H_2.

Библиографический список

1. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984.
2. Ланкастер К. Математическая экономика. М.: Советское радио, 1972.

3. Левин М.И., Макаров В.Л., Рубинов А.М. Математические модели экономического взаимодействия. М.: Физматлит, 1993.

4. Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1977.

5. Полтерович В.М. Экономическое равновесие и хозяйственный механизм. М.: Наука, 1990.

6. Рубинов А.М. Математические модели расширенного воспроизводства. Л.: Наука, 1983.

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое динамический технологический процесс?
2. Что такое динамическое равновесие?
3. В чём различие объектов модели расширяющейся экономики и динамического варианта H_2?
4. Какие экономические проблемы решает анализ модели расширяющейся экономики?
5. Можно ли определить значения стоимости в модели фон Неймана посредством решения задачи линейного программирования?
6. Какие результаты можно получить, представив модель расширяющейся экономики в форме пары взаимно двойственных ЗЛП?
7. Что подразумевается под рентой в модели расширяющейся экономики?
8. Можно ли посредством модели расширяющейся экономики определить величину процента на капитал? Если да, как? Если нет, почему?
9. Что такое максимальный темп сбалансированного роста?

3.3. Магистральные свойства экономических систем

Гипотеза Самуэльсона о магистрали

Динамическое равновесие в модели фон Неймана представляет собой не состояние, а траекторию поведения моделируемой системы. Для этой траектории характерно следующее:

- рост экономической системы является сбалансированным, что означает неизменность относительных интенсивностей технологических процессов, цен и структуры запасов во времени;
- темп сбалансированного роста экономической системы максимальный.

Представив динамическое равновесие как траекторию, естественно задаться следующими вопросами.

- Имеет ли равновесие какой-либо экономический смысл, если в момент времени 0 интенсивности процессов либо цены не находятся на траектории сбалансированного роста? Действительно, рост экономики не может быть сбалансированным в течение сколько-нибудь продолжительного времени из-за постоянных изменений технологических возможностей.
- Почему оказывается, что хозяйствующий субъект предпочитает структуру экономики, обеспечивающую максимально быстрый рост его доходов (по стоимости), контролируемых им запасов (по натуральной форме), нисколько не обращая внимания на то, *зачем* ему нужны эти запасы, кроме их дальнейшего наращивания?

Мотивация поведения хозяйствующих субъектов, составляющих в совокупности моделируемую экономику, вполне согласуется с предположением о максимизации ренты, но вряд ли можно с уверенностью говорить без предварительного обоснования, что любой хозяйствующий субъект безразличен к её натуральному составу.

Лауреат Нобелевской премии П. Самуэльсон предположил, что дело в следующем: какие бы предпочтения, касающиеся достаточно долгосрочной перспективы, не были характерны для хозяйствующих субъектов, траектория, ведущая к наиболее желаемому из достижимых состояний, в средней своей части обязательно приближается к траектории сбалансированного роста либо совпадает с ней. В соответствии с этой гипотезой наилучший способ достичь наиболее предпочтительного состояния в отдалённом будущем в реальной экономике вот какой:

- в течение некоторого времени изменить производственную структуру экономики, чтобы она обеспечивала сбалансированный (следовательно, максимальный) или близкий к нему рост;
- придерживаться этой структуры до тех пор, пока не потребуется отклониться от неё непосредственно для достижения наиболее предпочтительного состояния.

Если о траектории максимального сбалансированного роста говорят как о линии, к которой приближается наилучшая траектория, реализующая заданное предпочтение, то её называют *магистралью экономического роста* (или просто магистралью).

Предположение Самуэльсона стало отправной точкой многочисленных исследований, целью которых был поиск ответов на вопросы:

- как формализовать эту гипотезу;
- каким требованиям должна отвечать экономическая система, чтобы гипотеза оказалась верной;
- какими должны быть для этого индивидуальные предпочтения.

За многие годы исследований найден ряд возможных условий, при которых эта гипотеза (в той или иной форме) верна. Во многих случаях, однако, эти условия не настолько общие, чтобы можно было безоговорочно распространять их на реальную экономику.

Наиболее распространены две формализации гипотезы о магистрали.

1. Для любого положительного ε существует некоторое натуральное число k такое, что траектория, наилучшим образом реализующая в конечной точке *любое* предпочтение из заданного класса предпочтений U (далее такая траектория будет именоваться U-оптимальной), соответствует условию

$$\left\| \frac{\mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|} - \frac{\mathbf{x}^*}{\|\mathbf{x}^*\|} \right\| < \varepsilon \tag{3.54}$$

для любого $t \in T^*$, где $T^* \subseteq T$, $\#T - \#T^* < k$, где $\mathbf{x}^*$ — вектор сбалансированного роста. Иными словами, U-оптимальная траектория не отклоняется от магистрали более чем на e никогда, исключая не более чем k периодов.

2. Для любого положительного ε существует некоторое натуральное число k такое, что траектория, наилучшим образом реализующая в конечной точке любое предпочтение из заданного класса предпочтений U, соответствует условию (3.54) на участке, для которого

$$k \leqslant t \leqslant (\#T - k). \tag{3.55}$$

Первое условие может на первый взгляд показаться слишком слабым. Действительно, для конкретного случая k может быть больше числа элементов в множестве T, так что даже если условие (3.54) не выполняется ни для какого t (т.е. траектория поведения системы вовсе не приближается к магистрали в требуемой степени), условие $\#T - \#T^* < k$ оказывается верным. Но дело в том, что в приведённом определении ничего не говорится о длине траектории, т.е. число k от неё не зависит. Оно зависит только от ε и класса предпочтений U. Поэтому, коль скоро число k определено, всегда можно ввести в рассмотрение такое T, что длина траектории существенно превысит k, соответствующее даже очень малому ε. При этом моменты, в которые условие (3.54) не имеет места, могут произвольным образом чередоваться с моментами, для которых оно выполняется.

Второе условие более жёсткое. Оно требует, чтобы существовал непрерывный период, в течение которого условие (3.54) должно гарантированно выполняться для заданного ε, причём увеличение длины траектории (мощности множества T) на единицу должно непременно приводить к увеличению на единицу продолжительности этого периода.

Теоремы, формулирующие условия справедливости гипотезы о магистрали в первой форме, именуются *слабыми теоремами о магистрали*, во второй — *сильными*.

Формализация гипотезы П. Самуэльсона о магистрали не предъявляет никаких требований к динамике цен. Однако для цен можно ввести понятие магистрали точно так же, как и для интенсивностей технологических процессов, имея в виду, что динамическое равновесие предполагает определённые стоимостные пропорции наряду с производственными.

Условия существования магистрали в модели фон Неймана

Исследования правомерности гипотезы П. Самуэльсона о магистрали продемонстрировали, что экономике фон Неймана магистральные свойства в общем случае не присущи. В частных случаях, однако, траектория поведения неймановской экономики может приближаться к магистрали.

Например, пусть $(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \alpha, \beta)$ — динамическое равновесие в модели фон Неймана, $(\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j)$ — неймановский технологический процесс,

$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_j)$, $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_j)$, $\mathbf{x}_0$ — начальное состояние неймановской экономики, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ — такие матрицы, что

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\mathbf{A}_1}{\mathbf{A}_2}\right), \quad \mathbf{B} = \left(\frac{\mathbf{B}_1}{\mathbf{B}_2}\right), \quad (\mathbf{A}_1 - \alpha\mathbf{B}_1)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}, (\mathbf{A}_2 - \alpha\mathbf{B}_2)\,\mathbf{x} > \mathbf{0}. \tag{3.56}$$

Тогда сильная теорема о магистрали в модели фон Неймана имеет место при выполнении следующих условий.

1. Поведение экономической системы следует вменённым предпочтениям вида $\max \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_{t'} \rangle$, где $t' = \sup(T)$ — последний момент времени моделируемого периода, $\mathbf{c} \geqslant \mathbf{0}$.

2. Начальное состояние таково, что $\mathbf{Ax} \leqslant \mathbf{Bx}_0$.

3. Можно указать такой вектор $\mathbf{p}' \geqslant \mathbf{0}$, для которого

$\mathbf{p}'\mathbf{A} = \mathbf{c} - \mathbf{pA}$, $\mathbf{p}'\mathbf{B} = \mathbf{0}$.

4. Существуют действительное или комплексное $л \neq -1$ и вектор $\mathbf{z}$, не содержащий нулевых компонентов, такие, что $(\mathbf{A}_1 - л\mathbf{B}_1)\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

5. В некоторой строке матрицы $\mathbf{A}_1$ все коэффициенты, соответствующие используемым процессам в состоянии динамического равновесия, могут быть равны нулю только в случае, когда благо, соответствующее этой строке, не может быть выпущено ни одним процессом.

На языке экономиста это означает следующее. Чтобы для неймановской модели была верна сильная теорема о магистрали, предпочтительность той или иной траектории поведения экономической системы должна определяться только её конечной точкой. Складываться она должна из величин, пропорциональных интенсивностям технологических процессов в этой точке. В результате завершения технологических процессов, протекающих в начальной точке траектории, должна производиться продукция, достаточная для немедленного выхода на какую-либо точку магистрали. Условие 3 фактически достаточно жёстко задаёт класс предпочтений, при которых происходит выход на магистраль. В самом типичном случае, когда имеется единственное динамическое равновесие, а уравнение $\mathbf{p}'\mathbf{B} = \mathbf{0}$ имеет единственное решение, функция предпочтения, соответствующая этим условиям, оказывается полностью детерминированной (единственной). Кроме того, число технологических способов, выпуск которых не является комбинацией выпуска других способов, не должно превышать числа благ (иначе это уравнение вовсе не будет иметь решений). Условие 4 гарантирует единственность динамического равновесия: экономика в этом случае не распадается на подсистемы, которые могут функционировать независимо одна от другой. Последнее условие требует, чтобы в состоянии динамического равновесия некоторое благо, коль скоро оно выпускается, обязательно потреблялось бы хотя бы в одном из используемых процессов.

Из перечисленных условий самые жёсткие — требования соотношения количества благ и технологических процессов и ограничения, накладываемые на предпочтения. Говоря о предпочтениях, необходимо иметь в виду, что поведение экономики оказывается магистральным и в том случае, если предпочтения по математической форме не отвечают требованиям, указанным выше, но обусловливают поведение экономики, которое может быть в точности воспроизведено предпочтениями, соответствующими этим требованиям. Но даже с этой оговоркой условия, в которых в неймановской экономике существует тенденция к выходу на магистраль, весьма частные. Конечно, в реальности нельзя гарантировать выполнение этих условий сколько-нибудь продолжительное время.

Если в модели фон Неймана динамика интенсивностей технологических процессов проявляет магистральные свойства, то, как правило, динамика цен не является магистральной, и наоборот.

Модель Р. Раднера

Условия существования тенденции к магистральному развитию в модели фон Неймана, как видим, достаточно жёсткие. Встал вопрос: не являются ли упрощения, принятые в модели фон Неймана, столь существенными, что исключают тенденцию к магистральному развитию несмотря на то, что реальной экономике эта тенденция, возможно, присуща?

Р. Раднером была исследована система, в главных чертах схожая с неймановской моделью, но обладающая магистральными свойствами. В этой модели технологические возможности представлены в форме множества Y технологических процессов $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, где $\mathbf{a}$ — вектор затрат благ, $\mathbf{b}$ — соответствующий ему вектор выпусков в следующем периоде, причём $\mathbf{a} \geqslant \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \geqslant \mathbf{0}$.

Система Раднера полностью определена следующими условиями.

Свойства технологических процессов.

1. $(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) \in Y, (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) \in Y \Rightarrow (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) \in Y$.
2. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in Y \Rightarrow (k\mathbf{a}, k\mathbf{b}) \in Y \quad \forall k \geqslant 0$.
3. $(\mathbf{0}, \mathbf{b}) \in Y \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Свойства динамического равновесия.

Существуют такие векторы $\mathbf{a}^* \geqslant \mathbf{0}$, $\mathbf{p} \geqslant \mathbf{0}$ и константа β, для которых верно нижеследующее.

4. $(\mathbf{a}^*, \beta\mathbf{a}^*) \in Y$; $\langle \mathbf{p}, \mathbf{a}^* \rangle > 0$.
5. Для любого $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in Y$ имеет место $\langle \mathbf{p}, (\mathbf{b} - \beta\mathbf{a}) \rangle \leqslant 0$.
6. Для любого $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in Y$ такого, что $\mathbf{a} \neq k\mathbf{a}^* \ \forall k$, имеет место $\langle \mathbf{p}, (\mathbf{b} - \beta\mathbf{a}) \rangle < 0$.

Требования к начальному состоянию.

7. Задан начальный вектор $\mathbf{a}_0 \geqslant \mathbf{0}$ такой, что для некоторого $v > 0$ найдётся допустимая траектория $(\mathbf{a}_0; \mathbf{a}_1; ...; v\mathbf{a}^*)$.

Требования к предпочтениям.

8. Задан класс допустимых предпочтений U. Предпочтения задаются в виде функций $u(\mathbf{a}) \in U$.
9. Для $\mathbf{a} \geqslant \mathbf{0}$ любая функция $u(\mathbf{a}) \in U$ обладает свойством $u(k\mathbf{a}) = ku(\mathbf{a})$, где k — произвольное неотрицательное число (т.е. функция u является положительно однородной первой степени).
10. Существует такое положительное m, что для всех $u(\mathbf{a}) \in U$ и $\mathbf{a} \geqslant \mathbf{0}$ имеет место $u(\mathbf{a}) \leqslant m\langle \mathbf{p}, \mathbf{a} \rangle$.
11. Для любого $n > 0$ найдётся такая допустимая траектория $(\mathbf{a}^*; \mathbf{a}_1; ...; \mathbf{a}_t)$, что для любой $u(\mathbf{a}) \in U$ имеет место $u(\mathbf{a}_t) \geqslant n$.

Если эти условия выполняются, *теорема Раднера* устанавливает справедливость соотношения (3.54) для любой U-оптимальной траектории при $t \in T^*$, где $T^* \subseteq T$, $\#T - \#T^* < k$ (k — некоторое натуральное число). Теорема Раднера представляет собой слабую теорему о магистрали. В модели Раднера магистральные свойства присущи траекториям как интенсивностей технологических процессов, так и цен.

Рассмотрим условия модели Раднера с экономической точки зрения.

1. Любые два технологических процесса могут быть использованы совместно.

2. Каждый процесс может иметь любую неотрицательную интенсивность.

3. Никакой набор благ (кроме пустого) не может быть произведён из ничего.

4...6. Только процесс ($\mathbf{a}^*$, $\beta\mathbf{a}^*$) и пропорциональные ему процессы могут обеспечить максимальную ренту с используемых ими благ. Только вектор $\mathbf{a}^*$ задаёт магистраль экономического развития.

7. Начальное состояние системы должно быть таким, чтобы от него, используя возможные технологические процессы, можно было за конечное время перейти к состоянию, соответствующему магистрали.

8...11. Экономика изоморфна системе Раднера до тех пор, пока поведение первой можно объяснить императивом, формализуемым функцией положительно однородной первой степени, ограниченной сверху функцией, пропорциональной $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle$. В частности, это означает, что предпочтительность пустого набора благ не может быть больше предпочтительности набора, содержащего неотрицательные количества благ. Должна быть обеспечена возможность достижения из состояния $\mathbf{x}^*$ состояния со сколь угодно высоким уровнем предпочтительности независимо от того, какая именно функция предпочтения объясняет поведение системы (дело только за временем).

Если в некоторый момент времени запасы системы равны $\mathbf{a}$, в этот момент могут быть выбраны только процессы, затраты которых описываются вектором $\mathbf{a}$. Однако это не означает принципиальной невозможности неполного использования ресурсов. Например, множество технологических возможностей может быть таким, что вместе с каждым процессом $(\mathbf{a}_0, \mathbf{b})$ в него входят все процессы $(\mathbf{a}, \mathbf{b}+(\mathbf{a}-\mathbf{a}_0))$, где $\mathbf{a} \geqslant \mathbf{a}_0$.

Не имеет значения, какими и сколькими отраслями экономики осуществляется любой из допустимых технологических процессов.

В принципе экономика фон Неймана может отвечать требованиям теоремы Раднера, но только в очень частном случае, когда максимальный темп сбалансированного роста достигается при использовании всего одного технологического процесса, выпускающего все блага, необходимые для его функционирования. Но и это требование, чрезвычайно жёсткое, ещё не гарантирует, что поведение экономики будет носить магистральный характер. Кроме неймановской модели, теореме Раднера соответствует целый класс моделей, входящих в семейство моделей Неймана-Гейла, обобщающих классическую модель фон Неймана (но далеко не все модели из этого семейства). Модель Раднера указывает такие требования к экономике, обеспечивающие выход траектории её поведения на магистраль, которые в принципе могут выполняться на самом деле.

Предпочтения в модели Раднера определены только для последнего момента времени $t' = \sup(T)$. Экономическая система соответствует модели Раднера только в том случае, если она реализует долгосрочные приоритеты[1]. Траектория её поведения выходит на магистраль вне зависимости от того, каковы эти приоритеты конкретно. Следовательно, в течение некоторого времени она должна приблизиться к максимально возможному для неё темпу роста и, следовательно, к сбалансированной структуре. Если известно, что в каждый момент времени система реализует предпочтения, отстоящие от текущего на достаточно большой промежуток времени, то U-оптимальная траектория этой системы, приблизившись к магистрали, никогда не

[1] Природа этих приоритетов несущественна: они могут быть присущи самой моделируемой системе или складываться в условиях свободного обмена из приоритетов хозяйствующих субъектов. Однако важно, чтобы эти предпочтения допускали представление в форме, согласующейся с требованиями модели Раднера, например, в форме линейной комбинации интенсивностей технологических процессов.

отклонится от неё (разве что изменятся технологические параметры), даже если сами предпочтения будут со временем меняться, не выходя за рамки требований модели Раднера.

Благодаря магистральным свойствам в экономике Раднера и стоимости, и технологические пропорции — соотношение интенсивностей производства в отраслях экономики — мало зависят от целей хозяйствующих субъектов, пока эти цели складываются во вменённые предпочтения, отвечающие формальным требованиям модели и достаточно удалённые во времени. Стоимости при магистральном росте обретают самостоятельное бытие, почти независимое от целей. Компоненты вектора **p**, соответствующего магистрали (т.е. ситуации сбалансированного роста с максимальным темпом), характеризуют относительные вклады единичных количеств соответствующих благ в реализацию *любой* цели экономической системы, если эта цель достаточно удалена во времени и представима функцией, отвечающей предпосылкам модели Раднера.

Магистральные свойства моделей с нетерминальными предпочтениями

Требование долгосрочного характера предпочтений выполняется далеко не всегда. Оно может иметь место, например, при централизованной разработке стратегии развития экономики. В этом случае данное требование означает, что оптимальный план развития не зависит от его цели, если она достаточно отдалена во времени от момента принятия решения.

В рыночной экономике хозяйствующие субъекты, вне сомнения, придают значение не только долгосрочным, но и краткосрочным целям. Если имеют место остальные условия, при которой гипотеза о магистрали верна, можно предположить, что краткосрочная составляющая предпочтений не зависит от переменных модели, и включить её в состав пар (**a**, **b**) в форме, например, затрат на воспроизводство трудовых ресурсов. Отсюда следует гипотеза, согласно которой магистральные свойства при определённых условиях могут быть присущи экономике и в том случае, когда функция предпочтения учитывает состояние экономики в каждый момент в течение некоторого временно́го горизонта. Если эта гипотеза подтвердится, круг условий, имеющих место в реальности, для которых уже доказана тенденция к магистральному развитию, значительно расширится.

Для проверки этой гипотезы изучают модели с предпочтениями, учитывающими состояние системы не только в последний момент времени. Такие предпочтения называют *нетерминальными* в отличие от *терминальных* предпочтений[1] в модели Раднера и в варианте модели фон Неймана, для которого мы выше рассмотрели условия, приводящие к сильной теореме о магистрали.

Пока что модели с нетерминальными предпочтениями недостаточно изучены на предмет условий, при которых им присущи магистральные свойства. Условия, которые должны выполняться для выхода на магистраль любой траектории поведения, при нетерминальных предпочтениях оказываются более жёсткими. Их изучение продолжается, в т.ч. и отечественными учёными.

Одна из известных моделей с нетерминальными предпочтениями, для которой доказана сильная теорема о магистрали, следующая:

$$\begin{cases} \max \sum_{t=1}^{\phi} \delta \langle \mathbf{c}_t, \mathbf{x}_t \rangle ; \\ \mathbf{A}\mathbf{x}_t \leqslant \mathbf{x}_{t-1} ; \\ \mathbf{x}_t \geqslant \mathbf{0},\ \mathbf{x}_0 > \mathbf{0},\ t = 1 ... \phi, \end{cases} \tag{3.57}$$

где $\mathbf{x}_t$ — вектор интенсивностей технологических процессов в момент t; $\mathbf{c}_t$ — вектор коэффициентов линейной функции предпочтения в момент t; δ — норма дисконтирования, равная максимальному темпу сбалансированного роста для данной системы; $\mathbf{A}$ — леонтьевская матрица прямых затрат (подробнее см. стр. 73); ϕ — последний момент периода моделирования. Тенденция к магистрали в этой модели возникает при выполнении дополнительного условия, налагаемого на функцию предпочтения: для любого t должно иметь место $\langle \mathbf{c}_t, \mathbf{x}_t \rangle = \langle \mathbf{p}^*, \mathbf{x}^* \rangle$ — скалярному произведению векторов цен и интенсивностей технологических процессов (т.е. стоимости выпуска) при максимальном темпе сбалансированного роста.

[1] По-латыни terminus означает «предел», «граница».

Приведённая модель по своим предпосылкам близка к модели «затраты – выпуск», рассмотренной в п.2.4. Здесь мы также имеем дело с технологическими процессами, выпускающими единственный продукт и единственными для данного продукта. Ясно, что в реальной экономике дело обстоит иначе; однако из опыта применения числовой модели «затраты-выпуск» известно, что при помощи модели с подобным представлением технологических возможностей реальная экономика описывается достаточно точно. Этот факт имеет и теоретическое обоснование: условия сводимости различных множеств технологических возможностей к леонтьевскому варианту достаточно хорошо изучены и в основном выполнимы в реальности.

Условие $\langle \mathbf{c}_t, \mathbf{x}_t \rangle = \langle \mathbf{p}^*, \mathbf{x}^* \rangle$ имеет целью обеспечить равномерное снижение предпочтительности всей совокупности производимых благ с течением времени. Это вполне соответствует реальным предпочтениям: лучше иметь любой набор благ в момент времени t, чем в $t+1$, причём соотношение предпочтительности связано в представлении людей с темпом экономического роста через процент на капитал: ведь если экономике присуща тенденция к неймановскому динамическому равновесию, то она означает и тенденцию сближения темпа экономического роста и процента на капитал.

Модель (3.57), несмотря на то, что её предпосылки весьма жёсткие, демонстрирует, что требование долгосрочного характера предпочтений не является критическим для существования тенденции к выходу на магистраль. При известных условиях эта тенденция может существовать и при нетерминальных предпочтениях. Следовательно, тот факт, что реальные предпочтения, несомненно, нетерминальные, не означает, что гипотеза о магистрали заведомо не может быть применена к реальной экономике. Исследования вопроса о том, в какой степени или при каких обстоятельствах тенденция к выходу на магистраль присуща реальной экономике, будут продолжаться и впредь. От них зависит решение вопроса о том, насколько стоимость в реальной экономике оказывается независимой от конкретной формы предпочтений — движущей силы экономической динамики вообще и образования стоимости, в частности.

Резюме

1. Магистралью называется траектория экономического развития, обеспечивающая максимальный сбалансированный рост экономической системы.

2. Если экономика обладает магистральными свойствами, складывающиеся в ней стоимости не зависят от конкретного содержания целей хозяйствующих субъектов. Они характеризуют вклад блага в достижение любой цели из класса целей, в пределах которого развитие экономики остаётся магистральным.

3. Известные ныне условия, гарантирующие магистральное развитие экономики, не позволяют утверждать, что свойства реальной экономики обеспечивают выход на магистраль. Гипотеза о магистрали остаётся гипотезой.

4. В экономике с положительными эффектами взаимодействия и предпочтениями, заданными в линейной форме для достаточно отдалённого момента времени в будущем, траектория поведения, наилучшим образом реализующая эти предпочтения, будет приближаться к магистрали тем сильнее, чем более отдалённому моменту соответствуют предпочтения.

Библиографический список

1. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984.

2. Воркуев Б.Л. Модели макро- и микроэкономики. М.: ТЕИС, 1999.

3. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972.

4. Рубинов А.М. Математические модели расширенного воспроизводства. Л.: Наука, 1983.

Контрольные вопросы и задания

1. В чём суть гипотезы Самуэльсона о магистрали?

2. Каково экономическое содержание условий, при которых поведение экономики фон Неймана приобретает магистральный характер?

3. Что общего и в чём отличия в представлении технологических множеств моделей фон Неймана и Раднера?

4. Какова экономическая интерпретация предпосылок модели Раднера?

5. Назовите основной результат, полученный благодаря модели Раднера.

6. В чём разница между «слабыми» и «сильными» теоремами о магистрали?

7. Какой должна быть экономическая система, чтобы её поведение имело магистральный характер при нетерминальных предпочтениях?

8. При каких условиях можно распространять тенденцию к магистральному развитию на реальную экономику?

9. В чём разница между терминальными и нетерминальными предпочтениями?

10. Каково значение магистральных свойств экономики для теории стоимости?

11. Почему, несмотря на существование ряда теорем о магистрали, гипотезу о магистрали не следует считать подтвердившейся?

Глава 4. Стоимость в моделях и в реальности

4.1. Применение понятия «оптимальность» к реальной экономике

Все выводы, изложенные выше, основываются на предположении об оптимальности элементарных систем, из которых состоит экономика. Оптимальность предполагает снятие свободы системы управляющим воздействием. Отсутствие свободы обеспечивает конкретизацию стоимости.

Поэтому есть смысл остановиться на экономической сущности этого предположения: ведь параметры экономической системы в целом и самих элементарных систем подвержены непрерывному изменению, порой скачкообразному, а реальные системы не могут немедленно изменить своё состояние, чтобы согласовать его с изменившимися условиями.

Горизонты времени

Известны существенные различия в характеристиках одной и той же экономической системы, рассматриваемой в рамках «моментального», «краткосрочного» и «долгосрочного» горизонтов времени. *Моментальный* горизонт предполагает учёт решительно всех ограничений, связывающих хозяйствующего субъекта. *Краткосрочный* — всех, кроме преодолимых без посредства капитальных вложений (срок преодоления ограничений определяется целями исследования). Наконец, *долгосрочный* горизонт не учитывает ограничения, преодолимые посредством осуществления капитальных вложений.

Концепция оптимальной системы идеально соответствует рассмотрению реальной системы в рамках моментального горизонта времени. Любое состояние реальной системы представляет собой оптимум в рамках ограничений, не преодолимых немедленно, поскольку она выбрала именно это состояние из числа доступных в текущий момент.

Однако ограничения моментального горизонта слишком жёсткие. В этих пределах реальный хозяйствующий субъект, вероятнее всего, не имеет возможности осуществить произвольное количество сделок. Иными словами, он сталкивается с существенными ограничениями на возможности обмена. Поэтому состояние каждой элементарной системы будет оптимальным с учётом существования этих ограничений, препятствующих формированию общей стоимости.

В рамках краткосрочного горизонта времени состояние реальной системы в общем случае не оптимально. Предполагается, что в течение краткосрочного периода возникают возможности преодоления ограничений, а именно появляется доступ к ресурсам, становится возможным осуществление сделок, поступает новая информация[1]. Предполагая появление этих возможностей, мы уже не можем считать текущее состояние хозяйствующего субъекта оптимальным: в течение краткосрочного периода оптимумом может оказаться другое состояние.

Ещё в большей степени сказанное о краткосрочном горизонте касается долгосрочного. В этом случае искомый оптимум отделяется от настоящего момента продолжительным периодом времени, в течение которого возможны существенные изменения не только в объёмах доступных ресурсов, но и в технологических возможностях.

Оптимальность экономики в рамках краткосрочного горизонта

Ни один из горизонтов времени не может считаться идеально приемлемым для анализа стоимости. Можно ли в этом случае представить хозяйствующего субъекта в форме оптимальной системы?

Если параметры экономической системы в целом остаются неизменными в течение достаточно продолжительного времени, чтобы все элементарные системы полностью использовали предоставляемые ею возможности, то эта проблема не возникает и все полученные выше утверждения относительно стоимости имеют место.

Если за время, пока хозяйствующие субъекты обнаруживают и используют возможности обмена, в экономике происходят такие изменения, что условия осуществимости обменов существенно меняются,

[1] Конечно, может быть и наоборот: изменение ограничений с течением времени может привести к исчезновению возможностей, имевшихся в рамках моментального горизонта времени.

реальные пропорции обмена складываются случайно в пределах новых условий. Значения индивидуальной стоимости в этой ситуации не успевают стать одинаковыми. Можно указать лишь границы, в которых они заключены. Общественного норматива эффективности благ не существует. В качестве индивидуального норматива выступает альтернативная стоимость, известная данному субъекту. Однако стоимость в этом случае существует *в тенденции*, как необходимый результат цикла сделок в случае неизменности параметров экономической системы и как закон, управляющий процессом ценообразования. Разумеется, в этом случае не известно точно, какими должны быть количественные значения стоимости.

Метод, основанный на концепции оптимальной системы, наилучшим образом применим к временнóму горизонту, отвечающему противоречивым требованиям: настолько продолжительному, чтобы хозяева успели совершить все возможные обмены; настолько краткому, чтобы параметры экономики за это время не изменились. Существует ли компромисс между этими требованиями в реальной экономике, или нет, или иногда, — на этот вопрос формальный (математический) анализ ответить не в состоянии. Об этом можно судить по косвенным признакам либо по данным наблюдений за поведением экономики. Готового ответа на этот вопрос нет.

Цены одного и того же блага часто оказываются примерно одинаковыми у разных продавцов на протяжении весьма продолжительных периодов. Если бы дело обстояло иначе, мы были бы уверены, что общая стоимость существует только на бумаге. Но из наблюдаемой одинаковости цен ещё нельзя твёрдо заключить, что они приближаются к общей стоимости, поскольку их можно объяснить существованием альтернативной стоимости, одной и той же для всех хозяйствующих субъектов, в условиях, когда оптимум по Парето ещё не достигнут или даже вовсе недостижим. В последнем случае экономика, несомненно, должна существенно отличаться от системы H_1.

Чтобы быть уверенным, что индивидуальная стоимость блага для некоторого субъекта не отличается от общественной, мы должны убедиться в следующем:

- субъект использует благо;
- в рамках краткосрочного периода он не принимает мер по его продаже или приобретению.

Насколько эта ситуация типична для реальной экономики, судить трудно.

Перечисленные аргументы не позволяют сделать окончательный вывод о том, в какой степени и в каких случаях хозяйствующим субъектам присущи свойства оптимальной системы $\overline{E}$, а экономике в целом — системы H_1. Большинство современных экономистов считают модели, основанные на форме оптимальной системы, приемлемым инструментом исследования экономики. Из этого, конечно, не следует, что все они правы, поскольку можно указать условия, при которых все наблюдаемые явления, отмеченные выше и свидетельствующие в пользу гипотезы об общей стоимости, имеют место несмотря на то, что в большинстве случаев тенденции, противоположные формированию общей стоимости, в экономике преобладают.

Средства массовой информации и электронные телекоммуникации способствуют обеспечению индивидуумов обширной информацией о возможностях сделок, создают условия для их заключения не выходя из офиса или квартиры, что способствует формированию общей стоимости уже в рамках краткосрочного временно́го горизонта.

> Обычная ошибка состоит в наделении равновесия и оптимальности неким этическим содержанием: оптимум и равновесие — это, якобы, хорошо, иное плохо. На самом деле эти категории свободны от какой-либо этической (а значит, и нормативной) окраски и приобретают её только при решении специфических задач. То, что экономическая система стремится к состоянию равновесия, — не достоинство её, а свойство. Возможность достижения того или иного оптимума по Парето решающим образом зависит от первоначального распределения благ. Иной раз в оптимуме по Парето от голода могут умереть миллионы людей, а удовлетворительное социальное положение и тенденция к его дальнейшему улучшению вовсе не требуют, чтобы оптимум по Парето и сопряжённое с ним состояние конкурентного равновесия были достигнуты.

Резюме

1. Выбор формы представления экономической системы должен соответствовать временно́му горизонту исследования.

2. Если хозяйствующие субъекты не могут быть представлены в форме оптимальных систем, то общая стоимость как количественно определённая величина может не сформироваться. В этом случае она существует в форме тенденции ценообразования.

3. Большинство экономистов считает: имеются достаточные основания для того, чтобы в рамках краткосрочного горизонта времени рассматривать любого реального хозяйствующего субъекта как находящегося в состоянии оптимума, а экономическую систему — как находящуюся в состоянии конкурентного равновесия.

Библиографический список

1. Курс экономической теории / Под ред. проф. Чепурина М.Н., проф. Киселёвой Е.А. Киров, 1994. — С. 24-37, 79-89.

2. Фишер С., Дорнбуш Р., Шмалензи Р. Экономика. М.: Дело ЛТД, 1993. — С. 6-7, 21, 24-25, 99, 131-132, 162-163.

3. Хайек Ф. Конкуренция как процедура открытия // Мировая экономика и международные отношения. 1989, №12. — С. 6-14.

4. Debreu G. Theory of Value. N.Y.: Wiley, 1959.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие проблемы возникают в связи с представлением хозяйствующих субъектов в форме оптимальных систем?

2. Что такое горизонт времени?

3. Что понимают под долгосрочным временны́м горизонтом?

4. Почему рассмотрение экономики в рамках моментального горизонта времени неприемлемо с точки зрения теории стоимости?

5. Каковы основания для того, чтобы считать форму оптимальной системы приемлемой для представления экономики в краткосрочном периоде?

6. При каких условиях можно утверждать, что реальная экономическая система пребывает в состоянии равновесия?

7. Какие проблемы, по вашему мнению, порождает при исследовании стоимости представление хозяйствующих субъектов в форме неоптимальных систем?

4.2. Смысл стоимостных переменных в математических моделях

Вернёмся к материалу п.2.1.1, где множители Лагранжа оптимума математической модели отождествлены с индивидуальной стоимостью. Основания для этого достаточные. Но из этого отождествления ещё не следует, что переменные моделей конкурентных систем, названные в пособии общей стоимостью, соответствуют стоимости в реальной экономике; не следует, что стоимости в реальной жизни присущи те же закономерности, что и общей стоимости в моделях.

В рамках экономической интерпретации рассмотренных моделей остаётся возможность допущения, что стоимостные переменные соответствуют не стоимости, а неким теневым ценам. Пусть даже эти теневые цены полезны при теоретическом и прикладном анализе, но причина, определяющая цены, складывающиеся на рынке, возможно, ничего общего с ними не имеет (или, имея с ними нечто общее, отлична от них в существенных чертах).

Итак, нам необходимо показать, что можно поставить знак равенства между стоимостными переменными и реальной стоимостью, определяющей величину рыночных цен; что реальной стоимости присущи свойства, проявляющиеся не в одной конкретной модели (в зависимости от некоторых дополнительных условий) а в каждой из рассмотренных моделей.

Содержание стоимостных переменных системы H_1

Система H_1 состоит из элементарных систем, подобных $\overline{E}$. Понятие стоимости, введённое для последней, соответствует суждению хозяйствующего субъекта реальной экономики — будь то человек, администрация предприятия, правительство — о ценности, значимости того или иного блага *для него самого* в конкретных условиях. При этом неважно, существует ли нечто, подобное функции предпочтения, присущее реальному хозяйствующему субъекту (подробнее об этом на стр. 162). Значимость блага проявляется в том, что хозяйствующий субъект готов отказаться от некоторого количества другого блага ради некоторого количества данного, тем самым свидетельствуя, что последнее количество, по крайней мере, не менее значимо для него, чем первое.

Реальные хозяйствующие субъекты не располагают полной информацией о возможностях производства и обмена; однако ограничения, обусловленные отсутствием информации, в принципе не отличаются от других ограничений.

Некоторые реальные субъекты рынка, возможно, не имеют количественно измеримых предпочтений. В этом случае для них нельзя охарактеризовать предпочтение (а следовательно, и стоимость) количеством целевого блага. Но остаётся возможность измерения стоимости другими дефицитными благами.

Если предположить, что субъекты независимо друг от друга принимают решения, руководствуясь исключительно собственными интересами, в рамках ограничений, обусловленных средой, в которой они действуют, и располагают возможностями обмена, то их поведение имеет результат, предсказанный при исследовании системы H_1, а именно образование стоимости, общей для всех хозяйствующих субъектов реальной экономики. Основание для мнения, согласно которому стоимость в реальной экономике соответствует стоимости в системе H_1, — *одинаковый механизм образования стоимости* в этих двух системах.

Модель Вальраса и реальность

Модель Вальраса и её разновидности оперируют вектором равновесных цен вне зависимости от того, каким способом он образовался. В ней вводятся определённые правила формирования прав хозяйствующих субъектов на совокупный общественный продукт. Часть бюджета для потребителей зарабатывают производители, что описывает важное общественное отношение, характерное для реальной экономики.

Если технологические множества и предпочтения экономики Вальраса отвечают требованиям системы H_1, а система цен такова, что обмен в соответствии с ней не блокируется ни одним из собственников (это имеет место, по крайней мере, в состоянии конкурентного равновесия), то экономика Вальраса приобретает вид системы H_1, дополненной структурными ограничениями по распределению прибыли и расходованию бюджета. По крайней мере, при указанных условиях система Вальраса, вслед за H_1, подобна реальной экономике в чертах, существенных для анализа стоимости, а реальная стоимость соответствует вальрасовским ценам равновесия.

Можно показать, что для общей модели децентрализованной экономической системы, если в ней существует конкурентное равновесие, также найдётся модель, отражающая процесс ценообразования, более общая, чем H_1.

Стоимость в других дезагрегированных моделях экономики

Аналогия двойственных переменных системы H_2 и реальной стоимости следует из:

- соответствия общей стоимости в H_1 реальной стоимости;
- равенства двойственных переменных системы H_2 значениям общей стоимости в H_1.

В основной задаче планирования двойственные переменные в общем случае не могут рассматриваться в качестве стоимостей: они представляют собой только оценки благ с точки зрения того планового императива, который заложен в модель в форме целевой функции. Это, конечно, не означает, что они не могут в частных случаях совпадать со значениями стоимости.

Для модели экономической динамики неймановского типа существует тождественная ей динамическая разновидность системы H_2. При решении вопроса о том, соответствуют ли неймановские цены реальной стоимости, главная трудность вот какая: нельзя заранее сказать, согласуется ли целевая функция неймановской модели, представленной в форме H_2, с императивами поведения элементарных систем. Магистральное развитие реальной экономики гарантировало бы такое совпадение. Однако, как мы убедились, гипотеза о магистрали пока не получила бесспорного подтверждения применительно к реальной экономике. Поэтому говорить о соответствии стоимости неймановским ценам можно для случая, когда есть основания утверждать, что развитие экономики носит характер, близкий к магистральному.

Степень соответствия модели «затраты-выпуск» реальной экономике обсуждается в обширной литературе. Статистическую модель обычно признают достаточной для практического применения. Это ещё не основание для переноса на реальность результатов теоретического анализа. Но аспекты, рассмотренные в данном пособии, не вызывают проблем при экономической интерпретации, поскольку независимо от возможности переноса их на экономику в целом они верны для любого базисного решения системы H_2, описывающей реальную экономику.

Общественная стоимость в реальных экономических системах

Итак, стоимостные переменные моделей имеют аналог в реальной экономике, причём этот аналог — стоимость экономических благ — один и тот же для рассмотренных моделей. Стоимость обладает свойствами, выявленными при исследовании каждой из них. Она характеризует вклад единицы блага в достижение цели любого хозяйствующего субъекта, пользующегося данным благом. Следовательно, она является нормативом экономической эффективности блага для каждого отдельно взятого хозяина и для экономики в целом. Ей присущи связи с технологическими параметрами, проявляющиеся в модели Леонтьева и системе H_2. Если в тех или иных условиях верна гипотеза о магистрали, то стоимость:

- не зависит от конкретного вида реализуемых долгосрочных предпочтений;
- связана с приносимой данным благом рентой через величину процента на капитал, как в модели фон Неймана.

Наконец, она обеспечивает конкурентное равновесие по Вальрасу. Не будем забывать, что ей присущи ещё многие свойства, не рассмотренные в пособии, но зачастую даже более значимые, например, имеющие социальное значение.

Действительная трудность, ограничивающая возможность переноса результатов анализа стоимостных переменных на реальную стоимость, состоит в том, что математические свойства стоимости получены в предположении ряда формальных условий. Некоторые из них, например, условие замкнутости, несущественны для экономической интерпретации. Другие, как-то условия выпуклости технологических множеств, существенны. Они часто служат препятствием для экономической интерпретации моделей. Изучение свойств стоимости в моделях, накладывающих меньше ограничений математического характера на представление экономических систем, — одна из актуальных теоретических задач.

Резюме

Имеются достаточные основания для утверждения, что реальная стоимость обладает свойствами стоимостных переменных изученных моделей:

- в системах H_1 и H_2 — вследствие общности механизма образования стоимости в модели и в реальности;
- в моделях вальрасовского типа — вследствие возможности их преобразования в форму системы H_1 или более общей системы, описывающей процесс образования стоимости;
- в моделях расширяющейся экономики — вследствие возможности их преобразования в форму H_2 (при условии, что объект модели — экономика, развивающаяся по магистральной траектории);
- в моделях «затраты-выпуск» — поскольку рассмотренные нами свойства стоимости в этих моделях верны для системы H_2.

Существенное препятствие экономической интерпретации моделей теории стоимости — формальные условия, которые не всегда выполняются на практике.

Библиографический список

1. Гранберг А.Г. Моделирование социалистической экономики: Учеб. для студ. экон. вузов. М.: Экономика, 1988.

2. Воркуев Б.Л. Ценность, стоимость и цена. М.: Изд-во МГУ, 1995.

3. Немчинов В.С. Применение математических методов в экономических исследованиях и планировании // Академик В.С. Немчинов: Избранные произведения. М.: Наука, 1967. — Т. 3, с. 80-97.

4. Немчинов В.С. Математические методы в экономике и планировании // Академик В.С. Немчинов: Избранные произведения. М.: Наука, 1967. — Т. 3, с. 98-106.

5. Черемных Ю.Н. Вопросы качественного исследования решений динамических моделей экономики (элементы магистральной теории). М.: Издательство МГУ, 1971.

Контрольные вопросы и задания

1. Каковы аргументы в пользу утверждения, что стоимость в реальных экономических системах подобна общей стоимости в системе H_1?

2. В каких случаях модель децентрализованной экономики вальрасовского типа описывает одно из возможных состояний системы H_1?

3. Допустима ли интерпретация объективно обусловленных оценок системы H_2 как значений стоимости? Почему?

4. При каких условиях можно говорить о соответствии неймановских цен общественной стоимости?

5. В чём состоит ценность для теории стоимости выводов, полученных при анализе модели «затраты-выпуск»?

6. Если модели Эрроу-Дебре и фон Неймана описывают одну и ту же реальную экономику, значит ли это, что значения соответствующих стоимостных переменных этих моделей должны быть одинаковыми?

4.3. Воплощение общественной стоимости в ценах

Альтернативная стоимость

Общественная стоимость имеет формой своего проявления альтернативную стоимость — эффективность наилучшего альтернативного использования единицы ресурса. Категория альтернативной стоимости предполагает, что хозяйствующий субъект вместо потребления ресурса для реализации своих предпочтений имеет возможность предоставить его другому хозяину в обмен на целевое благо или иной ресурс, который можно использовать для производства целевого блага. В состоянии оптимума по Парето альтернативная стоимость:

- равна общей стоимости;
- либо равна индивидуальной стоимости, либо выше (в случае, если хозяйствующий субъект вовсе не использует данное благо).

Если понимать индивидуальную стоимость расширенно, как эффект от использования единицы ресурса для производства целевого блага не только *данным* субъектом, но и другими, то такая индивидуальная стоимость оказывается равной альтернативной стоимости для любого субъекта вне зависимости от того, достигнуто состояние оптимума по Парето или нет[1]. Действительно, если хозяин *A* обладает технологической возможностью, представляющей собой наилучшую альтернативу использования некоторого блага, то *любой B* в состоянии обменять некоторое количество этого блага на часть продукции техно-

[1] В предположении, что эта альтернатива известна всем подсистемам.

логического процесса хозяина A. Правда, величина самой альтернативной стоимости в этом случае точно не определена, она зависит от условий обменов, позволяющих данной системе использовать технологии другой системы.

Стоимость и представление о стоимости

Поведение людей первично по отношению к функции предпочтения. Предпочтения — это способ формализации реального поведения человека как самостоятельного хозяйствующего субъекта либо как руководителя фирмы. Человек не знает своей функции предпочтения хотя бы потому, что она относится не к нему, а к его модели; человек никогда не пытается рассчитать, сколько «целевого блага» принесёт ему тот или иной вид деятельности. Процесс выбора видов деятельности в значительной степени случаен, и предпочтения, выражаемые некоторой функцией, суть статистический результат наблюдения реального поведения. Не зная своей функции предпочтения, человек не знает индивидуальной стоимости благ для себя самого.

Это кажется парадоксом, но чтобы получить количественную характеристику своих собственных индивидуальных предпочтений, он должен вступить в отношение с обществом — пойти на рынок. Человек может быть уверен, что вклады последних малых единиц приобретённых им благ в реализацию его предпочтений пропорциональны ценам, если:

- ему точно известны полезные свойства приобретаемых благ (что на деле выполняется далеко не всегда);
- он купил ровно столько каждого блага, сколько хотел.

На рынке стоимость благ формируется под влиянием решений индивидуумов, которые обусловлены одновременно системой технологий и предпочтениями, которые сами индивидуумы не осознаю́т. Представление людей о стоимости формируется в процессе наблюдения пропорций обмена (цен) на рынке. Это представление, в свою очередь, влияет на решения о сделках, принимаемые людьми, т.е., говоря языком моделей, влияет на функцию предпочтения.

Информация и стоимость

Информация, которой располагают подсистемы, существенно влияет на стоимость и на представления о стоимости. Выше мы всюду, за исключением немногих особых случаев, предполагали, что хозяйствующие субъекты располагают полной информацией об имеющихся источниках благ и альтернативах обмена. Очевидно, в реальной экономике это зачастую не выполняется. Об ограничениях возможностей обмена, имеющих информационную природу, упоминалось на стр. 61. Рассмотрим примеры влияния различных предположений об обеспеченности хозяйствующих субъектов информацией на образование стоимости и на представления о ней.

Если некоторый хозяйствующий субъект a владеет информацией о возможностях обмена ресурсом s только с некоторым подмножеством Q' множества Q хозяйствующих субъектов данной экономики[1], то стоимость этого ресурса для него будет определяться наилучшей альтернативой использования ресурса в пределах множества Q'.

Другой пример. Предположим, что ресурс, поставляемый ресурсной средой, обнаруживается и захватывается некоторой системой из числа функционирующих в этой среде в течение некоторого периода времени случайной продолжительности, а суммарная интенсивность поступления каждого ресурса из ресурсной среды постоянна (см. п. 2.2). Тогда в течение известных периодов времени могут существовать нераспределённые запасы. Математическое ожидание величины запаса зависит от среднего времени его обнаружения после поступления и является постоянной величиной при заданных среднем времени обнаружения ресурса каждой системой и интенсивности поставок ресурсов из среды. В этом случае стоимость, как правило, окажется разной в случаях, если отсутствуют сведения:

- только об интенсивностях поступления ресурсов из среды;
- только о величине нераспределённого запаса;
- о том и другом одновременно.

Отклонение цен от стоимости

Коль скоро общая стоимость сложилась, пропорции обмена должны быть равны стоимости

[1] То есть не исключается возможность того, что условие осуществимости обмена (2.27) может быть выполнено для любой $q \in Q$, но a узнаёт об этом лишь в том случае, если $q \in Q'$.

уже потому, что ни у одного хозяина нет стимулов к обмену по ценам, отличным от общей стоимости. Это утверждение верно для формального мира, описываемого моделями. В реальном мире мы часто наблюдаем различные цены на одно и то же благо у различных продавцов. Причины тому можно собрать в две группы:

- отклонение цен от стоимости;
- другие причины.

Отклонение цен от стоимости объясняется только ограничениями на возможности обмена (стр. 61). Наиболее обыкновенное из них — централизованное регулирование цен. Каждое из ограничений, если распространяется на ограниченное число сделок, практически не препятствует образованию общей стоимости, влияя (часто весьма существенно) лишь на цену конкретной сделки. Если под действие этих факторов попадает преобладающее количество сделок с некоторым благом, они могут воспрепятствовать образованию общей стоимости и достижению конкурентного равновесия. Тогда общая стоимость не сформируется.

Остановимся на других причинах — действительных и кажущихся.

1. Неоднозначность самой стоимости. Это наиболее характерно для сопутствующих продуктов, например, говядины, молока и навоза, зерна и соломы, различных продуктов перегонки нефти.

2. Неточная спецификация благ. «Одно и то же благо» может оказаться совокупностью различных благ, существенно отличающихся по своим полезным свойствам. Например, в рамках ограничений моментального горизонта времени каменный уголь, имеющийся в избытке в пункте A и дефицитный в пункте B, — это разные блага. Благо «каменный уголь в пункте A» остаётся неограниченным для всей экономической системы, пока не будет придуман либо не станет доступен технологический процесс, преобразующий его в благо «каменный уголь в пункте B», дефицитное для всей экономической системы.

3. Сделки по поводу некоторого блага часто сопровождаются дополнительными условиями, которые влияют на цену. Например,

причина различия в ценах удобрений одного и того же вида может состоять в том, сопряжено ли их приобретение с доставкой, разгрузкой, подготовкой к внесению, консультациями по использованию, страховкой на случай нанесения ущерба урожаю или здоровью работников, рассрочкой оплаты. По существу, такие сделки заключаются по поводу не одного, а сразу нескольких благ (в том числе нематериальных), так что цена сделки складывается из цен всех вовлечённых в неё благ.

> Разнообразие условий сделок открывает возможности нечестной конкуренции, позволяя отдельным поставщикам (подрядчикам) назначать высокую цену без дополнительных услуг в расчёте на плохо информированного покупателя (заказчика).

4. Многообразие показателей, именуемых ценами. С точки зрения экономиста цена — это пропорция обмена для конкретной сделки. Однако существует множество других «цен»:

- *агрегированные* по некоторой группе сделок;
- *объявленные* (цены спроса и цены предложения), по которым сделки, быть может, и вовсе не будут заключены;
- *нормативные*, назначенные каким-либо полномочным органом для определённых целей;
- *рекомендуемые* или *расчётные*, предназначенные для информирования потенциальных участников сделок по поводу определённых благ;
- *оценочные стоимости*, определяемые экспертами по специальным методикам для целей, установленных законодательными актами или заказчиком.

Эти четыре причины не предполагают никаких отклонений цен от стоимости. Они лишь объясняют наблюдаемое разнообразие цен. Первая из них приводит к действительному различию цен, остальные — к кажущемуся, поскольку на самом деле состоят в различии между благами или показателями.

* * *

Теперь мы в состоянии дать ответы на вопросы, поставленные в начале пособия (стр. 6). Эти ответы не носят окончательного характера. Они отражают современные представления о стоимости, основанные на анализе математических моделей.

1. Что представляет собой стоимость — причина цен?

Стоимость есть мера относительной предпочтительности блага для любого элемента экономической системы, производящего или потребляющего это благо, и для экономической системы в целом (стр. 25, 60, 65).

Величина стоимости обусловлена объективными параметрами экономической системы — затратами благ в производственных процессах и личном потреблении (стр. 78, 81).

2. Возможно ли в реальной экономике существование равновесных цен?

Да, если с достаточной точностью выполняются условия теорем 1...3 о равновесии (стр. 110...112) либо предпосылки системы H_2 (стр. 69, 117), а также во многих других случаях, не рассмотренных в пособии.

3. В каком соотношении находятся стоимость, равновесные цены и цены фактически заключённых сделок?

- Стоимость предполагает существование конкурентного равновесия;
- её значения совпадают с ценами конкурентного равновесия (стр. 158);
- они могут не совпасть с ценами фактических сделок (стр. 164), но определяют тенденцию ценообразования (стр. 153);
- если динамика экономики носит магистральный характер, значения стоимости совпадают с ценами динамического равновесия (стр. 158).

Резюме

1. Индивидуальная стоимость единицы блага не может превысить его альтернативной стоимости. Любой хозяйствующий субъект в состоянии реализовать (возможно, при посредстве обмена) эффект от единицы блага не меньший, чем его альтернативная стоимость.

2. Стоимость и представления людей о стоимости образуются под влиянием разных факторов и могут существенно различаться.

3. Характер информационных процессов в экономической системе может влиять на величину стоимости.

4. Цены фактических сделок могут отличаться от стоимости только из-за различных ограничений обмена.

Библиографический список

1. Воркуев Б.Л. Ценность, стоимость и цена. М.: Изд-во МГУ, 1995.
2. Гатаулин А.М. Издержки производства сельскохозяйственной продукции: (Методология измерения и пути снижения). М.: Экономика, 1983.
3. Курс экономической теории / Под ред. проф. Чепурина М.Н., проф. Киселёвой Е.А. Киров, 1994. — С. 24-37, 79-89.
4. Немчинов В.С. Применение математических методов в экономических исследованиях и планировании // Академик В.С. Немчинов: Избранные произведения. М.: Наука, 1967. — Т. 3, с. 80-97.
5. Фишер С., Дорнбуш Р., Шмалензи Р. Экономика. М.: Дело ЛТД, 1993. — С. 6-7, 21, 24-25, 99, 131-132, 162-163.

Контрольные вопросы и задания

1. Чем обусловлена величина общественной стоимости?
2. В чём состоит связь общественной стоимости с предпочтениями хозяйствующих субъектов?
3. Верно ли утверждение «стоимость — это цена конкурентного равновесия»?
4. Что общего и в чём различия между общей стоимостью и альтернативной стоимостью?
5. Назовите основные причины, по которым представление о стоимости может отличаться от стоимости.
6. Какие факторы формируют представление о стоимости?
7. Как характер информационных процессов в экономике влияет на стоимость?
8. Объясните причины существования разнообразных цен одного и того же блага.

Математические обозначения, используемые в учебном пособии

Переменные величины обозначаются строчными латинскими буквами, набранными курсивом, например, a, x_j, или строчными греческими, например, ч. Множества и системы — заглавными латинскими буквами, набранными курсивом, например, A, E, или заглавными греческими, например, Г. Векторы — строчными латинскими или греческими буквами, набранными полужирным шрифтом, например, $\mathbf{a}$, $\mathbf{x}_j$, **о**. Матрицы — заглавными латинскими буквами, набранными полужирным шрифтом, например, $\mathbf{A}$.

$\forall$ — квантор всеобщности (читается как «все» или «любой»).

$\exists$ — квантор существования (читается как «существует», «найдётся» или «для некоторого»).

$\mathbf{0}$ — нулевой вектор.

$\mathbf{I}$ — единичная матрица.

R^n — n-мерное евклидово пространство (множество всех векторов, состоящих из n компонентов).

R_+^n — неотрицательный ортант n-мерного евклидова пространства (множество всех n-мерных векторов, не содержащих отрицательных компонентов).

$\mathbf{a}^{\text{т}}$, $\mathbf{A}^{\text{т}}$ — операция транспонирования вектора (матрицы).

$\mathbf{A}^{-1}$ — обратная матрица.

$\mathbf{a} = (a_i)$ — вектор $\mathbf{a}$, состоящий из компонентов a_i.

$\mathbf{A} = (a_{ij})$ — матрица $\mathbf{A}$, состоящая из компонентов a_{ij}.

$\mathbf{a} < \mathbf{b}$, $\mathbf{b} > \mathbf{a}$ — все компоненты вектора $\mathbf{a}$ меньше соответствующих компонентов вектора $\mathbf{b}$.

$\mathbf{a} \leqslant \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \geqslant \mathbf{a}$ — все компоненты вектора $\mathbf{a}$ не больше соответствующих компонентов вектора $\mathbf{b}$ и хотя бы один меньше.

$|\mathbf{x}|$ — вектор, состоящий из компонентов, равных абсолютным величинам соответствующих компонентов вектора $\mathbf{x}$: если $\mathbf{x} = (x_j)$, то $|\mathbf{x}| = (|x_j|)$.

$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ — скалярное произведение векторов **a** и **b**, т.е. $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$.

$\|\mathbf{x}\|$ — евклидова норма (длина) вектора, т.е. $\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$.

$\{a, b, c\}$ — множество, состоящее из элементов a, b, c.

$\{a \mid X\}$ — множество всех элементов a, обладающих свойством X.

$a \in X$ — элемент a принадлежит множеству X.

$a \notin X$ — элемент a не принадлежит множеству X.

$X \subset Y$ — множество X содержится во множестве Y, но не совпадает с ним.

$X \subseteq Y$ — множество X содержится во множестве Y или совпадает с ним.

$X \bigcap Y$ — пересечение множеств X и Y.

$X \bigcup Y$ — объединение множеств X и Y.

$X \setminus Y$ — разность множеств X и Y (множество элементов, принадлежащих X, но не принадлежащих Y).

$\sup(X)$ — верхняя грань множества.

$\inf(X)$ — нижняя грань множества.

$f \colon A \to B$ — однозначное отображение множества A на множество B, обозначаемое символом f.

$[a; b]$ — отрезок, соединяющий точки a и b.

$[a; b[$ — открытый отрезок: $[a; b[\; = [a; b] \setminus \{b\}$.

$\Rightarrow$ — логическое следование.

$\Leftrightarrow$ — логическая равносильность.

$\neg$ — логическое отрицание.

, — логическое умножение (конъюнкция).

$f(x)$, $g(\mathbf{y})$, $\mathbf{h}(z)$, $\mathbf{t}(\mathbf{k})$ — скалярные и векторные функции простого и векторного аргументов.

$a \to b$ — a стремится к b.

Предметный указатель

ОГЛАВЛЕНИЕ

Николай Михайлович СВЕТЛОВ

Стоимость в экономических системах

Учебное пособие для студентов экономических специальностей
Издание второе, переработанное

Отпечатано с готового оригинал-макета

Изд. лиц. №040182 от 17.12.96 г. Подписано в печать
Формат 60×84 $^{1}/_{16}$ Бумага офсетная №1 Гарнитура Литературная
Печать офсетная Усл. печ. л. Усл. кр.-отт.
Уч.-изд. л. Тираж 100 Изд. № Зак. №

Издательство МСХА
Типография Издательства МСХА
127550, Москва, Тимирязевская ул., 44