Министерство сельского хозяйства и продовольствия

Российской Федерации

Московская сельскохозяйственная академия им. К.А. Тимирязева

УДК 336.748:631.155

Светлов Н.М.

СВОЙСТВА АЛЬТЕРНАТИВНОЙ СТОИМОСТИ КАПИТАЛА В МОДЕЛИ НЕРАВНОМЕРНО РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Москва 1998

Целью статьи является исследование условий неотрицательности и единственности альтернативной стоимости капитала и цен в линейных динамических моделях. Показано, что достаточными условиями существования и единственности неотрицательной альтернативной стоимости капитала в рассмотренных моделях являются неотрицательная обратимость матрицы технологических коэффициентов первого порядка, полуотрицательность[1] матрицы технологических коэффициентов второго порядка и присутствие в составе капитальных запасов хотя бы для одного технологического процесса собственной продукции этого процесса.

Модели расширяющейся экономики фон Неймана в состоянии максимального сбалансированного роста и родственной ей модели неравномерно расширяющейся экономической системы [5] присуща система финансовых балансов, представимых в форме

$$(\mathbf{A} + r\mathbf{D})^{\mathrm{T}}\mathbf{p} = \mathbf{0}\ . \tag{1}$$

Здесь **A** — квадратная матрица, содержащая технологические коэффициенты первого порядка, означающие прямые затраты (отрицательные элементы) или чистые выпуски (положительные элементы) ограниченных благ в используемых технологических процессов. **D** — квадратная матрица, содержащая технологические коэффициенты второго порядка — нормы запаса ограниченных благ на еди-

[1] Под полуположительной матрицей понимается матрица, все элементы которой неотрицательны и хотя бы один положителен. Полуположительные векторы определяются аналогично. Полуотрицательная матрица — матрица, получаемая из полуположительной умножением её на −1. Неотрицательно обратимая матрица — матрица, получаемая обращением полуположительной матрицы. Понятие неотрицательной обратимости и свойства неотрицательно обратимых матриц обсуждаются в [4], стр. 131−135.

ницу интенсивности каждого используемого технологического процесса. Все её элементы отрицательны[2]. Элементы полуположительного вектора **p** представляют собой цены благ. Величина r является нормой финансовой рентабельности технологических процессов.

Система (1) имеет нетривиальные решения только при значениях r, при которых $(\mathbf{A}+r\mathbf{D})$ вырождена. Чтобы r можно было интерпретировать как альтернативную стоимость капитала, эта величина должна быть положительной и единственной, при которой существует полуположительное решение системы (1) относительно **p**. Очевидно, это требование предполагает соответствие матриц **A** и **D** некоторым условиям, которые нам и предстоит выяснить. Ограничимся установлением достаточных условий, выполняющихся для любой продуктивной экономической системы.

Семейство матриц $(\mathbf{A}+r\mathbf{D})$, где **A** неотрицательно обратима, **D** полуотрицательна, а r неотрицательно, обладает рядом свойств, перечисленных ниже. Пусть порядок обеих матриц равен n. Введём следующие обозначения: **c** — некоторый полуположительный вектор; **0** — нулевой вектор; r, r_1, r_2 — неотрицательные вещественные числа; r_0 — наименьший корень уравнения $\det(\mathbf{A}+r\mathbf{D}) = 0$; $\mathbf{b}_j$ — j-й столбец произвольной матрицы **B**; $\mathbf{i}_j$ — вектор, состоящий из нулей, кроме единицы в позиции j (т.е. j-й столбец единичной матрицы **I**); $f(r)$ обозначает функцию вида $|\det(\mathbf{A}+r\mathbf{D})|$ от r, определённую на всех r, при которых матрица $(\mathbf{A}+r\mathbf{D})$ неотрицательно обратима, и только на них.

Тогда верны следующие утверждения:

1. Если $(\mathbf{A} + r\mathbf{D})$ неотрицательно обратима, то $(\mathbf{A} + r_1\mathbf{D})$ неотрицательно обратима при любом $r_1 \leqslant r$, причём значения элементов $(\mathbf{A} + r_1\mathbf{D})^{-1}$ окажутся не менее значений соответствующих элементов $\mathbf{A}^{-1}$ и не более значений соответствующих элементов $(\mathbf{A} + r\mathbf{D})^{-1}$.
2. Пусть неотрицательно обратимая $\mathbf{A}_1$ получена из **A** путём вычитания положительного числа из некоторого её элемента. Тогда из $\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 = \mathbf{c}$ и $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ следует $\mathbf{x}_1 \geqslant \mathbf{x}$.
3. Если $f(r)$ постоянна в окрестности некоторого r, то она определена и постоянна при $r \in [0; +\infty]$, причём в $\mathbf{d}_j = \mathbf{Ax}$ $x_j = 0$, где x_j — j-й элемент вектора **x** (j=1...n).
4. Если $f(r)$ не постоянна, то (а) существует замыкание области её определения $[0; r_0]$; (б) $f(r)$ не определена в r_0; (в) $\lim\limits_{r\to r_0} f(r) = 0$.
5. Пусть $[0; r_0[$ является областью определения монотонно убывающей $f(r)$, **x** — решение уравнения $(\mathbf{A}+r\mathbf{D})\mathbf{x} = \mathbf{i}_j$. Тогда: (а) если при некотором ненулевом r^* вектор **x** содержит нулевой элемент, то этот элемент остаётся нулевым независимо от r; (б) любой другой элемент вектора **x** стремится к $+\infty$ при $r \to r_0$.
6. Если $[0; r_0[$ является областью определения монотонно убывающей $f(r)$, а $\operatorname{rang}(\mathbf{A}+r_1\mathbf{D}) = n-1$, то уравнение $(\mathbf{A}+r_0\mathbf{D})\mathbf{y} = 0$ имеет решения, причём все удовлетворяющие ему **y** полуотрицательны либо полуположительны.

Утверждение 1 означает, что при $r \to r_0$ $(r < r_0)$ интенсивности процессов, обеспечивающие единичный чистый выпуск определённого блага, не убывают, но могут расти. Согласно утверждению 2, то же самое происходит при неизменном

[2] В модели фон Неймана технологический процесс j обычно представляется в форме пары векторов $(\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j)$, задающих преобразование $x_j\mathbf{a}_j \to x_j\mathbf{b}_j$ при интенсивности процесса, равной x_j, поэтому символами **A** и **B** обычно обозначают матрицы, составленные соответственно из столбцов $\mathbf{a}_j$ и $\mathbf{b}_j$ для всех j. В этом случае матрица технологических коэффициентов первого порядка вычисляется как $\mathbf{B} - \mathbf{A}$, а второго — как $-\mathbf{B}$.

$r < r_0$ и убывании хотя бы одного из коэффициентов технологических матриц первого или второго порядков.

Утверждение 3 означает возможность ситуации, при которой полуположительный вектор цен существует при любом неотрицательном r. Равенство $x_j = 0$ в $\mathbf{d}_j = \mathbf{Ax}$, непременно выполняющееся в этом случае, означает, что существует способ выпустить капитальный запас для любого j-го процесса без участия самого j-го процесса. Это, в частности, предполагает, что ни один процесс не допускает в этом случае прямых затрат выпускаемой им продукции на цели прироста своих капитальных запасов. Для реальных экономических систем это условие не может выполняться (пример — производство строительных материалов). Следовательно, в моделях расширяющейся экономики, претендующих на описание реальной экономической системы, всегда существует хотя бы один процесс, использующий собственный продукт на формирование собственных капитальных запасов. В этом случае область неотрицательной обратимости $(\mathbf{A}+r\mathbf{D})$, как следует из утверждения 4, заведомо конечна.

Согласно утверждению 4, если $f(r)$ не является постоянной, т.е. если не существует способа выпустить капитальный запас для некоторого процесса без его собственного участия, альтернативная стоимость капитала существует и равна r_0, т.е. является граничной точкой области определения функции $f(r)$, отличной от нуля. Следовательно, она всегда равна наименьшему положительному значению нормы финансовой рентабельности технологических процессов, при котором достижима финансовая сбалансированность.

В соответствии с утверждением 5 интенсивности технологических процессов, обеспечивающие заданный чистый выпуск, неограниченно растут при $r \to r_0$ (кроме равных нулю). Из утверждения 6 явствует, что при r_0 существует полуположительный вектор стоимостей благ, обеспечивающих финансовое равновесие в

неравномерно расширяющейся экономике. Свойства, присущие стоимостям в случае их существования, подробно изучены в [5].

Библиографический список

1. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976.

2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / 3-е изд. М.: Наука, 1967.

3. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978.

4. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972.

5. Светлов Н.М. Система цен в условиях общего равновесия // Актуальные проблемы повышения экономической эффективности сельскохозяйственного производства: Сборник трудов научной конференции молодых ученых и специалистов экономического факультета ТСХА 25 июня 1996 г. М., 1996.

6. Светлов Н.М. Технико-экономическая интерпретация объективно обусловленных оценок // Актуальные проблемы повышения экономической эффективности сельскохозяйственного производства: Сборник трудов научной конференции молодых ученых и специалистов экономического факультета ТСХА 25 июня 1996 г. М., 1996.

7. Светлов Н.М. Экономическая интерпретация свойств балансовых систем // Труды Независимого Аграрно-Экономического Общества России: Выпуск I: Проблемы формирования аграрного рынка России. М.: Изд-во МСХА, 1997. — С. 311-317.

Приложение

Свойства матриц $(\mathbf{A}+r\mathbf{D})$

Цель нижеследующего изложения — познакомить читателя с формальным аппаратом, лежащим в основе выводов, сформулированных выше, и с некоторыми заслуживающими внимания свойствами матриц ($\mathbf{A}+r\mathbf{D}$), экономическая интерпретация которых очевидна. Доказательства теорем, приведённые ниже, опираются только на материал курса линейной алгебры экономических факультетов вузов. Желающим более подробно ознакомиться со свойствами неотрицательно обратимых матриц можно рекомендовать работы [1, 2, 3].

Утверждения 1...6 доказаны в качестве следующих теорем и их следствий.

Утверждение 1 — следствие 1 теоремы 3.

Утверждение 2 — следствие 3 теоремы 3.

Утверждение 3 — теорема 5 и лемма к теореме 5.

Утверждение 4 — теорема 6.

Утверждение 5 — теорема 7.

Утверждение 6 — теорема 8.

Ниже в дополнение к ранее введённым обозначениям используются следующие: $\mathbf{B}^j$ — матрица, полученная заменой в $\mathbf{B}$ всех столбцов, кроме j-го, на нулевые; $\mathbf{A}(k) = \mathbf{A}+r\sum_{j=1}^{k}\mathbf{D}^j$ ($\mathbf{A}(0) = \mathbf{A}$); $\mathbf{x}(k)$ — корень уравнения $\mathbf{A}(k)\,\mathbf{x}(k) = \mathbf{c}$; $\lambda(k, m)$ — m-й коэффициент разложения k-го столбца матрицы $\mathbf{D}^k$ по столбцам матрицы $\mathbf{A}(k{-}1)$; $\mathbf{B}_{ij}$ — алгебраическое дополнение элемента b_{ij} матрицы $\mathbf{B}$. Запись $\mathbf{V} \to \mathbf{Y}$ обозначает, что (а) размерности матриц $\mathbf{V}$ и $\mathbf{Y}$ одинаковы; (б) $\det \mathbf{V} \neq 0$ и (в) для всех элементов v_{ij} матрицы $\mathbf{V}$ выполняется условие $|v_{ij} - z_{ij}| \leqslant \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \to 0$.

Т е о р е м а 1. Пусть $\mathbf{V}$ — произвольная невырожденная матрица порядка $n \times n$, w_{ij} — элемент i-й строки и j-го столбца матрицы $\mathbf{W} = \mathbf{V}^{-1}$, матрица $\mathbf{Y}$ порядка $n \times n$ имеет ранг $n - 1$, вектор $\mathbf{p}^*$ — любое нетривиальное решение системы уравнений $\mathbf{Yp} = \mathbf{0}$, p_i — элемент i-й строки вектора $\mathbf{p}$. Тогда если j-я строка

матрицы $\mathbf{V}$ представляет собой линейную комбинацию каких-либо других строк $\mathbf{V}$, то $\lim\limits_{\mathbf{V}\to\mathbf{Y}} \mathbf{w}_j = c\mathbf{p}^*$.

Л е м м а 1. Для любой матрицы $\mathbf{Y} = (y_{ij})$ порядка $n \times n$, любого её минора порядка $(n{-}1) \times (n{-}1)$ и сколь угодно малого положительного числа ε существует такая $n \times n$-матрица $\mathbf{V} = (v_{ij})$, что (а) для всех её элементов выполняется условие $|v_{ij}{-}y_{ij}| \leqslant \varepsilon$, (б) $\det(\mathbf{V}) \neq 0$, (в) минор $\mathbf{M}_v$ матрицы $\mathbf{V}$, соответствующий выбранному минору $\mathbf{M}_y$ матрицы $\mathbf{Y}$ (т.е. составленный из строк и столбцов с теми же номерами, что и $\mathbf{M}_y$), не равен нулю.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сначала случай, когда все элементы главной диагонали минора $\mathbf{M}_y$ являются элементами главной диагонали матрицы $\mathbf{Y}$.

Пусть матрица $\mathbf{V}$ образована по правилу $\mathbf{Y}{-}\varepsilon\mathbf{I}$. Тем самым она соответствует условию (а). Заметив, что все собственные значения матрицы $\varepsilon\mathbf{I}$ равны ε, представим матрицу $\mathbf{V}$ в виде двучлена $-\varepsilon\mathbf{Y}^0+\mathbf{Y}^1$ и применим формулу собственного значения матричного многочлена:

$$\lambda(\mathbf{V}) = -\varepsilon\lambda(\mathbf{Y}^0) + \lambda(\mathbf{Y}^1) = -\varepsilon + \lambda(\mathbf{Y})$$

(здесь $\lambda(\mathbf{X})$ — некоторое (любое) собственное значение матрицы $\mathbf{X}$). Аналогично для миноров:

$$\lambda(\mathbf{M}_v) = -\varepsilon\lambda(\mathbf{M}_y^0) + \lambda(\mathbf{M}_y^1) = -\varepsilon + \lambda(\mathbf{Y}).$$

Если ε меньше наименьшего из числа положительных собственных значений матрицы $\mathbf{Y}$ и её минора $\mathbf{M}_y$ то в числе собственных значений матрицы $\mathbf{V}$ и минора $\mathbf{M}_v$ не будет ни одного нулевого, следовательно, выполняются условия (б) и (в). Если ни $\mathbf{Y}$, ни $\mathbf{M}_y$ не имеют положительных собственных значений, то матрицы $\mathbf{V}$ и $\mathbf{M}_v$ не вырождены при любом положительном ε.

Теперь предположим, что минор $\mathbf{M}_y$ в матрице $\mathbf{Y}$ выбран произвольным образом. Положим, в минор не вошли i-я строка и j-й столбец. Рассмотрим матрицу $\mathbf{Y}'$, полученную из матрицы $\mathbf{Y}$ путём взаимозамены i-й и j-й строк. Выберем в ней минор $\mathbf{M}'_y$ таким образом, что в него не входят j-е столбец и строка. Элементы главной диагонали этого минора будут принадлежать главной диагонали матрицы $\mathbf{Y}'$. Определители $\mathbf{Y}'$ и $\mathbf{M}'_y$ отличаются от определителей $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{M}_y$ разве что знаком, поскольку получены из них путём перестановки строк, а для $\mathbf{Y}'$ и $\mathbf{M}'_y$ теорема уже доказана. Следовательно, для любой матрицы $\mathbf{Y}$ и сколь угодно малого положительного ε существует хотя бы одна $\mathbf{V}$, отвечающая условиям (а), (б) и (в).

Лемма 2. Пусть $\mathbf{Y}_k$ — матрица порядка $(n-1)\times n$, имеющая ранг $n-1$, полученная вычёркиванием k-й строки из произвольной $n\times n-$матрицы $\mathbf{Y}$; $\mathbf{V}_k$ — матрица, полученная вычёркиванием той же строки из $\mathbf{V}\to\mathbf{Y}$; $\mathbf{q}^*$ — нетривиальное решение уравнения $\mathbf{V}_k\mathbf{q}=\mathbf{0}$; $\mathbf{p}^*$ — нетривиальное решение уравнения $\mathbf{Y}_k\mathbf{p}=\mathbf{0}$. Тогда $\lim\limits_{\mathbf{V}\to\mathbf{Y}}\mathbf{q}^*=c\mathbf{p}^*$, где c — коэффициент пропорциональности ($c\neq 0$).

Доказательство. Выберем в $\mathbf{Y}_k$ базисный минор $\mathbf{M}_y$. Соответствующий минор матрицы $\mathbf{V}_k$ обозначим $\mathbf{M}_v$. В соответствии с леммой 1 матрица $\mathbf{V}$ может быть выбрана таким образом, что $\det\mathbf{M}_v\neq 0$. Обозначим через $\mathbf{y}_f$ столбец матрицы $\mathbf{Y}_k$, не вошедший в базисный минор и имеющий номер f; через $\mathbf{v}_f$ — соответствующий столбец матрицы $\mathbf{V}_k$.

Нетривиальные решения уравнения $\mathbf{Y}_k\mathbf{p}=\mathbf{0}$ можно найти из уравнения $\mathbf{M}_y\mathbf{p}_f{}^*=-\mathrm{p}_f\,\mathbf{y}_f$, а $\mathbf{V}_k\mathbf{q}=\mathbf{0}$ — из $\mathbf{M}_v\mathbf{q}_f{}^*=-\mathrm{q}_f\,\mathbf{v}_f$, где $\mathbf{p}_f{}^*$ — вектор, полученный из $\mathbf{p}^*$ путём вычёркивания f-го элемента, p_f — f-й элемент вектора $\mathbf{p}^*$, $\mathbf{q}_f{}^*$ — вектор, полученный из $\mathbf{q}^*$ путём вычёркивания f-го элемента, q_f — f-й элемент вектора $\mathbf{q}^*$. При этом значения p_f и q_f могут быть выбраны произвольно, лишь бы они не были равны нулю.

Значения элементов p_i вектора $\mathbf{p}^*$ и элементов q_i вектора $\mathbf{q}^*$ для любого $i=1...n-1$ определяются по формуле Крамера:

$$q_i=(\mathbf{M}_v)_i\,/\,\mathbf{M}_v\,,$$

$$p_i=(p_n/q_n)\times[(\mathbf{M}_y)_i\,/\,\mathbf{M}_y]\,,$$

где $(\mathbf{M}_v)_i$ — определитель, полученный из $\mathbf{M}_v$ путём замены его i-го столбца на столбец $-q_f\,\mathbf{v}_f$, $(\mathbf{M}_y)_i$ — определитель, полученный из $\mathbf{M}_y$ путём замены его i-го столбца на столбец $-p_f\,\mathbf{y}_f$.

Заметив, что $\lim\limits_{\mathbf{V}\to\mathbf{Y}}(\mathbf{M}_v)_i=(\mathbf{M}_y)_i$, поскольку $\lim\limits_{\mathbf{V}\to\mathbf{Y}}\mathbf{M}_v=\mathbf{M}_y$ и $\lim\limits_{\mathbf{V}\to\mathbf{Y}}\mathbf{v}_n=\mathbf{y}_n$, получаем $\lim\limits_{\mathbf{V}\to\mathbf{Y}}q_i=(q_n/p_n)p_i$. Следовательно,

$$\lim_{\mathbf{V}\to\mathbf{Y}}\mathbf{q}^*=(q_n/p_n)\,\mathbf{p}^*=c\mathbf{p}^*.$$

Доказательство теоремы. В матрице $\mathbf{W}$ j-й столбец может быть определён как $\mathbf{w}_j=\mathbf{W}\,\mathbf{i}_j$. Отсюда $\mathbf{V}\mathbf{w}_j=\mathbf{i}_j$. Вычеркнув из этого соотношения и уравнения $\mathbf{Y}\mathbf{p}=\mathbf{0}$ j-е строки и отождествив w_{ij} с q_i, приходим к случаю, рассмотренному в лемме (2), в соответствии с которым $\lim\limits_{\mathbf{V}\to\mathbf{Y}}\mathbf{w}_j=c\mathbf{p}^*$. Теорема доказана.

В доказательстве теоремы 1 не используются условия неотрицательной обратимости и полуотрицательности матриц. Она представляет собой более общий результат, характеризующий свойства модели неравномерно расширяющейся экономической системы в самом общем виде. В несколько иной форме этот результат представлен в [5]. Здесь он приведён в форме, необходимой для доказательства теоремы 8. Экономическая интерпретация теоремы 1 применительно к модели неравномерно расширяющейся экономической системы дана в [5]. Эта теорема допускает интерпретацию и в других микроэкономических моделях [6, 7].

Теорема 2. (а) В соотношении $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{c}$ вектор $\mathbf{x}$ полуположителен при любом $\mathbf{c}$. (б) Если в $\mathbf{B}\mathbf{x}=\mathbf{c}$ вектор $\mathbf{x}$ полуположителен при любом $\mathbf{c}$, то $\mathbf{B}$ неотрицательно обратима.

Доказательство. $\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}$, причём оба множителя полуположительны и $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$, поскольку иное при $\det(\mathbf{A}^{-1})\neq 0$ означало бы, что $\mathbf{c}=\mathbf{0}$. Следовательно, имеет место (а). В силу (а) предпосылка утверждения (б) выполнима. В качестве $\mathbf{c}$ можно выбрать столбцы $\mathbf{i}_j$ при $j=1...n$ и таким образом рассчитать каждый столбец матрицы $\mathbf{A}^{-1}$. По условию теоремы все решения $\mathbf{Bx} = \mathbf{c}$, в т.ч. и найденные столбцы, полуположительны, следовательно, $\mathbf{B}$ неотрицательно обратима. Теорема доказана.

Итак, матрица $\mathbf{B}$ в уравнении $\mathbf{Bx} = \mathbf{c}$ неотрицательно обратима тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}$ полуположителен при любых $\mathbf{c}$.

Теорема 3. (а) Существует неотрицательно обратимая матрица вида $(\mathbf{A}+r\mathbf{D})$; (б) При любом r, при котором $(\mathbf{A}+r\mathbf{D})$ неотрицательно обратима, элементы вектора $\mathbf{x}(n)$ не убывают с ростом r.

Доказательство. Решение системы уравнений, отличающейся от ранее решённой системы единственным столбцом, может быть получено по формуле

$$k_j = \frac{x_j}{1+r\lambda_j}\,; \tag{2}$$

$$k_m = x_m - k_j \cdot r\lambda_j\,,\ \ m \neq j, \tag{3}$$

где k_j — переменные новой системы уравнений, λ_j — коэффициенты разложения вектора, прибавленного к j-му столбцу исходной матрицы, по её столбцам. Используя (2, 3), можно построить рекуррентную формулу для вычисления корней уравнения $(\mathbf{A}+r\mathbf{D})\,\mathbf{x}(n) = \mathbf{c}$. Представим $(\mathbf{A}+r\mathbf{D})$ в форме $\mathbf{A}(n)$. Тогда

$$x(j)_j = \frac{x(j-1)_j}{1+r\lambda(j,\,j)}\,; \tag{4}$$

$$x(j)_m = x(j-1)_m - r\lambda(j,\,m)\,x(j)_j,\ \ m \neq j, \tag{5}$$

где $x(j)_m$ означает m-й элемент вектора $\mathbf{x}(j)$.

Согласно теореме 2 вектор $\mathbf{x}$, в силу неотрицательной обратимости $\mathbf{A}$ и неотрицательности $\mathbf{c}$, полуположителен. Величины $\lambda(1, m)$, а значит, и $r\lambda(1, m)$, заведомо неположительны вследствие той же теоремы 2, т.к. они суть решения уравнения $\mathbf{A\lambda} = \mathbf{d}_j$, где $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda(1, m))$, а $\mathbf{d}_j$ неположителен. Таким образом:

$x(1)_1$ неотрицателен и не убывает по крайней мере при всех r, при которых $r\lambda(j, m) > -1$;

$x(1)_m$ $(m \neq 1)$ неотрицательны и не убывают, пока неотрицателен $x(1)_1$, т.к. в этом случае оба его слагаемых неотрицательны.

Всегда можно указать такие достаточно малые r, при которых $\mathbf{A}(1)$ неотрицательно обратима. Следовательно, при этих r (если, разумеется, в матрице более одного столбца) $\lambda(2, m)$ неположительны, и далее аналогичным образом доказывается существование r, при которых неотрицательно обратима матрица $\mathbf{A}(2)$, и неубывание элементов вектора $\mathbf{x}(2)$. По достижении $\mathbf{A}(n)$ теорема полностью доказана.

Следствие 1. Если $(\mathbf{A} + r\mathbf{D})$ неотрицательно обратима, то $(\mathbf{A} + r_1\mathbf{D})$ неотрицательно обратима при любом $r_1 \leqslant r$, причём значения элементов $(\mathbf{A} + r_1\mathbf{D})^{-1}$ окажутся не менее значений соответствующих элементов $\mathbf{A}^{-1}$ и не более значений соответствующих элементов $(\mathbf{A} + r\mathbf{D})^{-1}$.

Следствие 2. Если при некотором r $(\mathbf{A} + r\mathbf{D})$ не является неотрицательно обратимой, то при любом $r_1 \geqslant r$ $(\mathbf{A} + r_1\mathbf{D})$ также не является неотрицательно обратимой.

Следствие 3. Пусть неотрицательно обратимая $\mathbf{A}_1$ получена из $\mathbf{A}$ путём вычитания положительного числа из некоторого её элемента. Тогда из $\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 = \mathbf{c}$ и $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ следует $\mathbf{x}_1 \geqslant \mathbf{x}$.

Следствие 4. Если $(\mathbf{A} + r\mathbf{D})$ неотрицательно обратима, то $\mathbf{A}(j)$ неотрицательно обратима при любом j.

Доказательство. При всех r, при которых $(\mathbf{A} + r\mathbf{D})$ неотрицательно обратима, значения элементов $\mathbf{x}(j)$ никогда не превышают значений соответствующих элементов $\mathbf{x}(j+1)$. Следовательно, значения элементов $\mathbf{x}(j)$ заключены между значениями соответствующих элементов векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}(n)$.

Теорема 4. Если $(\mathbf{A}+r\mathbf{D})$ неотрицательно обратима, то $|\det(\mathbf{A})| \geqslant |\det(\mathbf{A}+r\mathbf{D})|$.

Доказательство. Представим $(\mathbf{A}+r\mathbf{D})$ в форме $\mathbf{A}(n)$. Поскольку $\mathbf{A}(j)$ обратима (следствие 4 из теоремы 3), прибавление столбца к любому её столбцу (т.е. переход от $\mathbf{A}(j)$ к) суть прибавление линейной комбинации столбцов $\mathbf{A}(j)$. Но прибавление к данному столбцу линейной комбинации других не влияет на определитель. Поэтому, чтобы вычислить $\det(\mathbf{A}(j+1))$, достаточно разложить прибавляемый столбец по столбцам старого определителя и, в соответствии с правилом выноса общего множителя столбца за знак определителя, умножить старый определитель на $\lambda(j+1, j+1)$. Поэтому, зная $\det(\mathbf{A})$, можно определить $\det(\mathbf{A}(n))$ по формуле

$$\det(\mathbf{A}(n)) = \det(\mathbf{A}) \times \prod_{j=1}^{n}(1+r\lambda(j, j)). \tag{6}$$

Поскольку матрица $\mathbf{A}(j)$ неотрицательно обратима (следствие 4 из теоремы 3), $1 \geqslant (1+r\lambda(j, j)) > 0$ (см. доказательство теоремы 3), следовательно, $|\det(\mathbf{A})| \geqslant |\det(\mathbf{A}+r\mathbf{D})|$. Теорема доказана.

Следствие. $f(r)$ является непрерывной, гладкой и не возрастает.

Доказательство. Непрерывность и гладкость прямо следуют из формулы (6), остаётся доказать невозрастание. Для этого достаточно доказать, что если $r_1 < r$, $f(0) \geqslant f(r_1) \geqslant f(r)$. Но $f(0) \geqslant f(r_1)$ непосредственно следует из теоремы 4, а $f(r_1) \geqslant f(r)$ становится очевидным, если мы представим $(\mathbf{A}+r\mathbf{D})$ как

$$(\mathbf{A} + r_1\mathbf{D}) + (r - r_1)\mathbf{D},$$

т.е. как неотрицательно обратимую матрицу, представляющую собой сумму неотрицательно обратимой и неположительной.

Теорема 5. Если $f(r)$ постоянна в окрестности некоторого r, то она определена и постоянна при $r \in [0; +\infty]$.

Лемма. Если $f(r)$ постоянна в окрестности r_1, то в $\mathbf{d}_j = \mathbf{Ax}$ $x_j = 0$ для любого j (x_j — j-й элемент вектора $\mathbf{x}$).

Доказательство. Предположим обратное: $x_j \neq 0$. Поскольку перестановка столбцов определителя влияет только на его знак, она не влияет на значение $f(r)$ на всей области её определения. Поменяем местами 1-й и j-й столбцы определителя, тогда из $x_1 \neq 0$, используя формулу (6), получаем, что $f(r)$ убывает в окрестности r: первый множитель произведения ряда меньше 1, т.к. $x_1 = \lambda(1, 1) < 0$, остальные не больше 1. Но это противоречит посылке леммы. Следовательно, $x_j = 0$.

Доказательство теоремы 5. Из леммы следует, что если $f(r)$ не убывает в окрестности хотя бы одной точки области определения, то прибавление матрицы $r\mathbf{D}$ к матрице $\mathbf{A}$ суть прибавление к каждому столбцу $\mathbf{A}$ линейной комбинации других её столбцов, а эта операция не может изменить величину определителя. Это означает, что $f(r) = \det(\mathbf{A})$ при $r \in [0; +\infty]$. Теорема доказана.

Следствие. Если $f(r)$ убывает при некотором r, то она убывает при любом r.

Т е о р е м а 6. Если $f(r)$ не постоянна, то (а) существует замыкание области её определения $[0; r_0]$; (б) $f(r)$ не определена в r_0; (в) $\lim\limits_{r \to r_0} f(r) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следуя определению области определения $f(r)$ и принимая во внимание следствие 2 теоремы 3, достаточно показать, что, если существует хотя бы один положительный корень r_0 уравнения $\det(\mathbf{A}+r\mathbf{D}) = 0$, то для любого $r < r_0$ матрица $(\mathbf{A}+r\mathbf{D})$ неотрицательно обратима. Но как показано при доказательстве теоремы 3, $(\mathbf{A}+r\mathbf{D})$ неотрицательно обратима, пока $\forall j \;\; r\lambda(j, j) > -1$; с другой стороны, из формулы (6) следует, что $\exists j \;\; r\lambda(j, j) = -1$ означает $\det(\mathbf{A}+r\mathbf{D}) = 0$, а следовательно, $r = r_0$. Поскольку $(\mathbf{A}+r_0\mathbf{D})$ не является неотрицательно обратимой, область определения $f(r)$ в этом случае — $[0; r_0[$, а её замыкание — $[0; r_0]$. Тем самым доказаны утверждения (а) и (б).

В пределах области своего определения $f(r)$ совпадает с непрерывной функцией $g(r) = |\det(\mathbf{A}+r\mathbf{D})|$, определённой на множестве неотрицательных чисел. Следовательно, в полном соответствии с утверждением (в) $\lim\limits_{r \to r_0} f(r) = g(r_0) = 0$. Теорема полностью доказана.

Т е о р е м а 7. Пусть $[0; r_0[$ является областью определения монотонно убывающей $f(r)$, $\mathbf{x}$ — решение уравнения $(\mathbf{A}+r\mathbf{D})\mathbf{x} = \mathbf{i}_i$. Тогда: (а) если при некотором ненулевом r^* вектор $\mathbf{x}$ содержит нулевой элемент, то этот элемент остаётся нулевым независимо от r; (б) любой другой элемент вектора $\mathbf{x}$ стремится к $+\infty$ при $r \to r_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть x_j — j-й элемент вектора $\mathbf{x}$, $r_1 < r^*$, $r_2 > r^*$. Поскольку в $(\mathbf{A}+r^*\mathbf{D})\mathbf{x} = \mathbf{i}_i$ $x_j = 0$, в $(\mathbf{A}+r_1\mathbf{D})\mathbf{x} = \mathbf{i}_i$ $x_j = 0$, т.к. x_j неотрицателен и, согласно следствию 1 теоремы 3, не возрастает с уменьшением r. Пусть $\mathbf{M}_a$, $\mathbf{M}_d$, $\mathbf{M}_y$ — матрицы, образованные из матриц $\mathbf{A}$, $\mathbf{D}$, $(\mathbf{A}+r\mathbf{D})$ соответственно путём вычёркивания из каждой i-й строки и j-го столбца. При любом $r < r^*$ $\det(\mathbf{M}_y) = 0$, поскольку $x_j = 0$. Рассмотрим функцию

$$g(r) = \det(\mathbf{M}_y) = \det(\mathbf{M}_a + r\mathbf{M}_d).$$

Она представляет собой многочлен степени не выше $n-1$. Согласно основной теореме алгебры, если степень многочлена выше 0, он может иметь не более $n-1$ нулей. Но $g(r)$ имеет больше нулей, следовательно, её порядок равен 0, а она сама тождественно равна 0. Поэтому $x_j = 0$ при любом r. Тем самым доказано утверждение (а).

Если в формуле (4) $x(j)_j \neq 0$, то $x(j-1)_j \neq 0$ при любом $r_0 \in [0; r_0[$ вследствие утверждения (а); значит, при $r\lambda(j, j) \to -1$ $x(j)_j \to +\infty$, а вслед за ним, в силу (5), $x(j)_m \to +\infty$, что приводит к $x(n)_j \to +\infty$, $x(n)_m \to +\infty$, значит, утверждение (б) верно. Теорема полностью доказана.

Т е о р е м а 8. Если $[0; r_0[$ является областью определения монотонно убывающей $f(r)$, а $\operatorname{rang}(\mathbf{A}+r_1\mathbf{D}) = n-1$, то уравнение $(\mathbf{A}+r_0\mathbf{D})\mathbf{y} = 0$ имеет решения, причём все удовлетворяющие ему $\mathbf{y}$ полуотрицательны либо полуположительны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введём обозначение $\mathbf{Y} = (\mathbf{A}+r_0\mathbf{D})$. Выберем в $\mathbf{Y}$ i-ю строку, линейно зависимую от других её строк, и рассмотрим вспомогательную систему уравнений $\mathbf{X}\mathbf{x} = \mathbf{i}_i$, где $\mathbf{X} = (\mathbf{A}+r\mathbf{D})$, $r \in [0; r_0[$. В этом случае, согласно теореме 7, при $r \to r_0$ вектор $\mathbf{x}$ остаётся полуположительным; согласно теореме 1, $\lim\limits_{\mathbf{V} \to \mathbf{Y}} \mathbf{x} = c\mathbf{y}$, где c — коэффициент пропорциональности. Следовательно, вектор $\mathbf{y}$ или неположителен, или неотрицателен, в зависимости от знака c. Теорема доказана.

Вследствие теоремы 7 $\lim\limits_{\mathbf{V} \to \mathbf{Y}} c = \infty$.