МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ СЕВООБОРОТОВ

Н.М. Светлов

Процессы перераспределения земли, сопровождающие осуществляемую ныне аграрную реформу, порождают серьёзные экономические и агрономические проблемы. Изменения форм хозяйствования, размеров сельскохозяйственных предприятий, возникновение кооперативов и крестьянских хозяйств на месте прежних крупных предприятий сопровождаются, кроме прочего, разрушением сложившихся севооборотов. В связи с этим возрастает актуальность проблемы разработки простых и эффективных методов планирования севооборотов.

В настоящей статье предлагается модель динамического программирования, предназначенная для оптимизации севооборота, рассматриваются условия практического использования модели, пути её совершенствования.

В простейшем варианте модели предполагается, что задано F — множество культур[1], возделывание которых в данном хозяйстве возможно; исчерпывающим образом описаны все возможные предшественники для каждой культуры; каждой паре "культура — предшественник" однозначно поставлена в соответствие величина математического ожидания результата хозяйственной деятельности (далее для краткости будем говорить о чистом доходе), получаемого с 1 га данной культуры после данного предшественника; размер всех полей одинаков. Таким образом, предполагается, что на величину математического ожидания чистого дохода не оказывают влияния более

[1] Здесь под культурой понимается способ использования поля в течение ровно одного года, например озимая пшеница с пожнивными, вико-овсяная смесь, яровой ячмень с подсевом многолетних трав, многолетние травы второго года пользования, чистый пар и т.п.

удалённые предшественники данной культуры, нежели непосредственный. В этом случае математическое ожидание чистого дохода с 1 га севооборота можно рассчитать как

$$\left(\sum_{t=1}^{T-1} p(c_t, c_{t+1})\right) + p(c_T, c_1), \qquad (1)$$

где t — номер поля в севообороте, T — число полей в севообороте, c_t — культура, занимающая поле t в 1-й год использования севооборота, c_{t+1} — культура, занимающая поле $t+1$ в тот же год, т.е. предшественник культуры c_t, $p(c_t, c_{t+1})$ — чистый доход с 1 га культуры c_t, выращиваемой после культуры c_{t+1}. Задача оптимизации севооборота выглядит следующим образом:

$$\max \left(\sum_{t=1}^{T-1} p(c_t, c_{t+1})\right) + p(c_T, c_1);$$

$$t \in [1;T] \quad c_{t+1} \in F(c_t); \qquad (2)$$

$$c_{T+1} = c_1$$

(здесь $F(c_t)$ — множество возможных предшественников культуры c_t).

Задача (2) является задачей динамического программирования. Для её решения следует использовать рекуррентную формулу

$$q(c_t) = \max_{c_t \in F'(c_{t-1})} (q(c_{t-1}) + p(c_{t-1}, c_t)). \qquad (3)$$

Здесь $q(c_{t-1})$ — сумма чистых доходов с 1 га полей 1…t-1, $F'(c_{t-1})$ — множество тех предшественников культуры c_{t-1}, для которых существует возможность составить хотя бы одну допустимую последовательность, заканчивающуюся на T-м поле предшественником культуры c_1. Под допустимой подразумевается последовательность, отвечающая условию $c_{t'+1} \in F(c_{t'})$ для $t' \in [t;T]$.

Для применения формулы следует положить $q(c_1)$ равным нулю и продолжать расчёты вплоть до $t=T+1$. Можно построить рекуррентную формулу и для вычислений в обратной последовательности. Величина $q(c_{T+1})/T$ есть максимально возможное математическое ожидание чистого дохода с 1 га севооборота при заданных T, F(c) и $p(c_t, c_{t+1})$. Формально данный метод требует рассмотреть все $c_1 \in F$, но на практике для сокращения объёма вычислений можно задать в качестве c_1 одну из культур множества F, которая заведомо должна входить в севооборот.

Модель оптимизации севооборотов в её простейшем виде не учитывает некоторые требования к севооборотам, возникающие на практике. Рассмотрим возможные направления её развития и условия практического использования.

Задача о кратчайшем оптимальном севообороте. Очевидно, что из числа севооборотов, возможных на данном множестве культур и включающих разное число полей, существует наилучший. Он не единственный: равноценными ему будут, по крайней мере, севообороты, число полей в которых кратно данному, а последовательность культур та же самая. Отсюда задача: из всех возможных севооборотов найти оптимальный севооборот[2], занимающий наименьшее число полей. Эта задача возникает в том случае, если возможны различные варианты разделения отведённого под севооборот земельного массива на поля.

Учёт технико-экономических ограничений. При разработке реальных севооборотов агроном принимает во внимание ограничения, накладываемые специализацией предприятия, размером и составом машинно-тракторного парка, наличными трудовыми ресурсами и т.п. Соответствующая постановка задачи следующая: найти оптимальный севооборот, отвечающий заданным технико-экономическим ограничениям.

[2] Под оптимальным севооборотом здесь и далее понимается севооборот, обеспечивающий максимум математического ожидания чистых результатов хозяйственной деятельности в расчёте на 1 га севооборота.

Учёт продолжительного влияния культур. Существуют культуры, которые не могут встречаться в севообороте чаще, чем один раз в несколько лет. Отсюда задача: найти оптимальный севооборот, если для некоторых культур задано минимальное число лет, которое должно пройти перед последующим появлением данной культуры в севообороте.

Учёт агрономических требований. С агрономической точки зрения более обоснована модель севооборота, основанная не на жёстко заданных отношениях "культура — предшественник — доход", а на учёте влияния каждой культуры и используемой при её возделывании технологии на ряд параметров состояния полей (как-то содержание влаги, питательных веществ и другие характеристики почвы, засорённость, заражённость вредителями, болезнями и т.п.). При этом должны выполняться следующие требования: по завершении ротации значения контролируемых параметров должны быть не хуже, чем перед его началом; для каждой культуры контролируемые параметры должны находиться в заданных пределах; математическое ожидание дохода с 1 га культуры является функцией контролируемых параметров.

Интерес представляют не только модели оптимальных севооборотов, но и модели освоения севооборотов, решение которых представляет собой наилучшую последовательность культур, обеспечивающую переход от последней убранной с данного поля культуры к культуре первого года осваиваемого севооборота в течение установленного промежутка времени.

Задача о кратчайшем оптимальном севообороте легко разрешима. В основе её решения лежит следующая теорема:

Оптимальный севооборот, соответствующий постановке задачи (2) и состоящий из наименьшего возможного числа полей, не содержит повторяющихся культур.

Доказательство. Предположим, в кратчайшем севообороте некоторая культура c* встречается n раз, n>1. В этом случае в севооборот входят n допустимых последовательностей культур, начинающихся с c* и заканчивающихся предшественником культуры c*. Следовательно, любая из них может быть самостоятельным севооборотом. Пусть S — математическое ожидание чистого дохода с 1 га исходного севооборота, S_k — с 1 га k-й допустимой последовательности культур. Если $S_1>S$, то исходный севооборот не является оптимальным, так как существует севооборот с бо́льшим математическим ожиданием чистого дохода с 1 га. Если существует $S_j<S$, то

$$\frac{-S_j+\sum_{i=1}^{n} S_i}{n-1} > S,$$

следовательно, существует $S_h>S$, а это значит, что исходный севооборот не является оптимальным. Если для всех i $S_i=S$, то исходный севооборот оптимальный, но не состоит из наименьшего числа полей. Таким образом, оптимальный севооборот, состоящий из наименьшего числа полей, не может включать одну и ту же культуру более одного раза, что и требовалось доказать.

Из теоремы следует, что для обнаружения оптимального севооборота, состоящего из минимального количества полей, необходимо применять рекуррентную формулу

$$q(c_t) = \max_{c_t \in F'(c_{t-1}) \setminus C_{t-1}} (q(c_{t-1})+p(c_{t-1},c_t)), \qquad (4)$$

где C_{t-1} — множество культур, уже размещённых на полях 1…t-1, без ограничения числа лет.

Для решения задач с технико-экономическими ограничениями и продолжительным влиянием культур используется формула

$$q(c_t) = \max_{c_t \in F''(c_1 \ldots c_{t-1})} (q(c_{t-1})+p(c_{t-1},c_t)), \qquad (5)$$

где $F''(c_1 \ldots c_{t-1})$ — множество предшественников культуры c_{t-1}, для которых существует возможность составить допустимую последовательность, заканчивающуюся на T-м поле предшественником культуры c_1, такую, что она вместе с уже размещёнными культурами $c_1 \ldots c_{t-1}$ отвечала бы дополнительным ограничениям.

В рамках динамического программирования реализация постановки задачи оптимизации севооборотов с учётом агрономических требований может оказаться неэффективной. Однако если связи «культура-предшественник» будут, как и в остальных постановках, задаваться, задача будет разрешима посредством формулы (5).

Следует отметить, что на севообороты с ограничениями теорема о единственности каждой культуры в кратчайшем оптимальном севообороте не распространяется.

Составление плана освоения севооборота сводится к решению задач, рассмотренных выше. Отличие состоит в том, что она состоит в размещении культур не по полям, а во времени, и в том, что планируемая для t-го поля культура последнего года переходного периода должна быть предшественником культуры для t-го поля внедряемого севооборота. Соответственно, при разработке соответствующих моделей к чистому доходу, который будет получен через k лет, должен применяться соответствующий коэффициент дисконтирования, а число лет переходного периода должно быть задано заранее.

Обычно несущественно, какое из полей занять в первый год использования осваиваемого севооборота первой культурой, какое — второй и т.д. Поэтому, чтобы повысить эффективность плана освоения, можно при реализации модели предусмотреть возможность выбора варианта размещения культур осваиваемого севооборота по полям в первый год его использования.