МОСКОВСКАЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ им. К.А.ТИМИРЯЗЕВА

Актуальные проблемы повышения экономической эффективности сельскохозяйственного производства

Сборник трудов научной конференции молодых учёных и специалистов экономического факультета ТСХА 25 июня 1996 г.

Н.М. Светлов

ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ОБЪЕКТИВНО ОБУСЛОВЛЕННЫХ ОЦЕНОК

Цель настоящей статьи состоит в исследовании смысловой связи между технико-экономическими коэффициентами линейной экономико-математической модели (ЛЭММ), с одной стороны, оптимальными оценками и интенсивностями способов оптимального плана, с другой.

Рассмотрим ЛЭММ вида

$$\begin{aligned}
&\max \sum_{j\in J} c_j x_j\\
&\forall\, i\in I_L \quad \sum_{j\in J} a_{ij}x_j \le b_i\\
&\forall\, i\in I_G \quad \sum_{j\in J} a_{ij}x_j \ge b_i\\
&\forall\, i\in I_E \quad \sum_{j\in J} a_{ij}x_j = b_i\\
&\forall\, j\in J_L \quad x_j \ge 0;\ \forall\, j\in J_G \quad x_j \le 0,
\end{aligned} \qquad (1)$$

Москва 1996

где множества $I = I_L \cup I_E \cup I_G$, $J_E = J \setminus J_L \setminus J_G$, множества I_L, I_E, I_G не пересекаются между собой, множества J_L, J_E, J_G не пересекаются между собой.

Предположим, что соответствующая модели задача линейного программирования имеет оптимальное решение и уже решена. Следовательно, известны оптимальное значение целевой функции Z, наборы столбцов J_B и строк I_B её оптимального базиса, оптимальное значение целевой функции двойственной задачи, также равное Z, наборы столбцов I_B и строк J_B оптимального базиса двойственной задачи.

Запишем для целей анализа следующие вспомогательные задачи:

$$\begin{aligned}
&\forall\, i\in I_B \quad \sum_{j\in J_B} a_{ij}x_j - b_i x' = 0\\
&\sum_{j\in J_B} c_j x_j - Zx' = 0;
\end{aligned} \qquad (2)$$

$$\begin{aligned}
&\forall\, j\in J_B \quad \sum_{i\in I_B} a_{ij}p_i - c_j p' = 0\\
&\sum_{i\in I_B} b_i p_i - Zp' = 0.
\end{aligned} \qquad (3)$$

Относительно этих задач верны следующие утверждения.

1. Матрица $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ задачи (3) представляет собой транспонированную матрицу $\mathbf{A}$ задачи (2).

2. Ранг матриц задач (2) и (3) на единицу меньше их размерности (следовательно, эти матрицы вырождены).

3. Задачи (2) и (3) имеют бесконечно много решений.

4. Если принять $x' = 1$ и $p' = 1$, то значения соответствующих переменных задач (1) и (2) совпадут, равно как и значения двой-

ственных переменных задачи (1) и соответствующих им переменных задачи (3).

Первое утверждение следует непосредственно из записи задач (2) и (3).

Второе утверждение требует доказательства. Доказать, что rang $\mathbf{A} \geq \#I_B$, несложно: ведь в неё входит базис задачи линейного программирования размерностью[1] $\#I_B \times \#I_B$. Осталось доказать, что матрица вырождена. Действительно, по построению правый столбец является линейной комбинацией остальных столбцов (равно и нижняя строка является линейной комбинацией остальных строк).

Третье утверждение прямо следует из второго.

Четвёртое утверждение вытекает из теоремы о базисе задачи линейного программирования, применённой к задаче (1) и к двойственной ей задаче.

Будем использовать обозначение $\mathbf{V} \to \mathbf{Y}$, если (а) размерности обеих матриц одинаковы; (б) $\det \mathbf{V} \neq 0$ и (в) для всех коэффициентов v_{ij} матрицы $\mathbf{V}$ выполняется условие $|v_{ij}-z_{ij}| \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \to 0$).[2] Обозначим $\mathbf{W} = \mathbf{V}^{-1}$, w_{ij} — коэффициенты матрицы $\mathbf{W}$.

[1] Символ # обозначает операцию определения числа элементов множества.

[2] Далее символ $\to$ будем использовать по отношению к матрицам только в этом смысле (коэффициенты матрицы, стоящей слева от символа, неограниченно стремятся к коэффициентам матрицы, стоящей справа, причём левая матрица остаётся невырожденной). В этом случае будем говорить, что матрица $\mathbf{V}$ стремится к $\mathbf{Y}$.

Т е о р е м а 1. Для любой матрицы $\mathbf{Y}$, имеющей размерность $n \times n$, некоторого её минора, имеющего размерность $(n-1)\times(n-1)$, и сколь угодно малого положительного числа ε существует такая $n \times n$-матрица $\mathbf{V}$, что (а) для всех её коэффициентов v_{ij} выполняется условие $|v_{ij}-y_{ij}| \leq \varepsilon$, (б) $\det \mathbf{V} \neq 0$, (в) минор $\mathbf{M}_v$ матрицы $\mathbf{V}$, соответствующий[3] выбранному минору $\mathbf{M}_y$ матрицы $\mathbf{Y}$, не равен нулю.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сначала случай, когда все элементы главной диагонали минора $\mathbf{M}_y$ являются элементами главной диагонали матрицы $\mathbf{Y}$.

Пусть матрица $\mathbf{V}$ образована по правилу $\mathbf{Y}-\varepsilon\mathbf{E}$. Тем самым она соответствует условию (а). Заметив, что все собственные значения матрицы $\varepsilon\mathbf{E}$ равны ε, представим матрицу $\mathbf{V}$ в виде двучлена $-\varepsilon\mathbf{Y}^0+\mathbf{Y}^1$ и применим формулу собственного значения матричного многочлена: $\lambda(\mathbf{V}) = -\varepsilon\lambda(\mathbf{Y}^0)+\lambda(\mathbf{Y}^1) = -\varepsilon+\lambda(\mathbf{Y})$, (здесь $\lambda(\mathbf{X})$ — некоторое (любое) собственное значение матрицы $\mathbf{X}$). Аналогично для миноров: $\lambda(\mathbf{M}_v) = -\varepsilon\lambda(\mathbf{M}_y{}^0)+\lambda(\mathbf{M}_y{}^1) = -\varepsilon+\lambda(\mathbf{Y})$. Отсюда очевидно, что если ε меньше наименьшего из числа положительных собственных значений матрицы $\mathbf{Y}$ и её минора $\mathbf{M}_y$ то в числе собственных значений матрицы $\mathbf{V}$ и минора $\mathbf{M}_v$ не будет ни одного нулевого, следовательно, выполняются условия (б) и (в). Если ни $\mathbf{Y}$, ни $\mathbf{M}_y$ не имеют положительных собственных значений, то матрицы $\mathbf{V}$ и $\mathbf{M}_v$ не вырождены при любом положительном ε.

[3] т.е. составленный из строк и столбцов с теми же номерами, что и $\mathbf{M}_y$.

Теперь предположим, что минор $\mathbf{M}_y$ в матрице $\mathbf{Y}$ выбран произвольным образом. Положим, в минор не вошли i-я строка и j-й столбец. Рассмотрим матрицу $\mathbf{Y'}$, полученную из матрицы $\mathbf{Y}$ путём взаимозамены i-й и j-й строк. Выберем в ней минор $\mathbf{M}_y'$ таким образом, что в него не входят j-е столбец и строка. Элементы главной диагонали этого минора будут принадлежать главной диагонали матрицы $\mathbf{Y'}$. Очевидно, что определители матриц $\mathbf{Y'}$ и $\mathbf{M}_y'$ отличаются от определителей матриц $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{M}_y$ разве что знаком, поскольку первые получены из вторых путём перестановки строк, а для $\mathbf{Y'}$ и $\mathbf{M}_y'$ теорема уже доказана. Следовательно, для любой матрицы $\mathbf{Y}$ и сколь угодно малого положительного ε существует хотя бы одна $\mathbf{V}$, отвечающая условиям (а), (б) и (в). Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $\mathbf{Y}_k$ – матрица размерностью $(n-1)\times n$, имеющая ранг $n-1$, полученная вычёркиванием k-й строки из произвольной $n\times n$-матрицы $\mathbf{Y}$; $\mathbf{V}_k$ – матрица, полученная вычёркиванием той же строки из $\mathbf{V} \to \mathbf{Y}$; $\mathbf{q}^*$ – нетривиальное решение уравнения $\mathbf{V}_k\mathbf{q} = \mathbf{0}$; $\mathbf{p}^*$ – нетривиальное решение уравнения $\mathbf{Y}_k\mathbf{p} = \mathbf{0}$. Тогда $\lim\limits_{\mathbf{V}\to\mathbf{Y}} \mathbf{q}^* = c\mathbf{p}^*$, где c – некоторая константа ($c \neq 0$).

Доказательство. Выберем в $\mathbf{Y}_k$ базисный минор $\mathbf{M}_y$. Соответствующий минор матрицы $\mathbf{V}_k$ обозначим $\mathbf{M}_v$. В соответствии с теоремой (1) матрица $\mathbf{V}$ может быть выбрана таким образом, чтобы $\det \mathbf{M}_v \neq 0$. Обозначим через $\mathbf{y}_f$ столбец матрицы $\mathbf{Y}_k$, не вошедший в базисный минор и имеющий номер f; через $\mathbf{v}_f$ – соответствующий столбец матрицы $\mathbf{V}_k$.

Нетривиальные решения уравнений $\mathbf{Y}_k\mathbf{p} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{V}_k\mathbf{q} = \mathbf{0}$ можно найти из уравнений $\mathbf{M}_y\mathbf{p}_f^* = -p_f\mathbf{y}_f$ и $\mathbf{M}_v\mathbf{q}_f^* = -q_f\mathbf{v}_f$ соответственно, где

$\mathbf{p}_f^*$ – вектор, полученный из $\mathbf{p}^*$ путём вычёркивания f-го элемента, p_f – f-й элемент вектора $\mathbf{p}^*$, $\mathbf{q}_f^*$ – вектор, полученный из $\mathbf{q}^*$ путём вычёркивания f-го элемента, q_f – f-й элемент вектора $\mathbf{q}^*$. При этом значения p_f и q_f могут быть выбраны произвольно, лишь бы они не были равны нулю.

По формуле Крамера для любого $i = 1\ldots n$ имеем

$$q_i = (\mathbf{M}_v)_i/\mathbf{M}_v \ ,$$

$$p_i = (p_n/q_n)\times[(\mathbf{M}_y)_i/\mathbf{M}_y] \ ,$$

где $(\mathbf{M}_v)_i$ – определитель, полученный из $\mathbf{M}_v$ путём замены его i-го столбца на столбец $-q_f\mathbf{v}_f$, $(\mathbf{M}_y)_i$ – определитель, полученный из $\mathbf{M}_y$ путём замены его i-го столбца на столбец $-p_f\mathbf{y}_f$. Заметив, что $\lim\limits_{\mathbf{V}\to\mathbf{Y}} (\mathbf{M}_v)_i = (\mathbf{M}_y)_i$, поскольку $\lim\limits_{\mathbf{V}\to\mathbf{Y}} \mathbf{M}_v = \mathbf{M}_y$ и $\lim\limits_{\mathbf{V}\to\mathbf{Y}} \mathbf{v}_n = \mathbf{y}_n$, получаем, что $\lim\limits_{\mathbf{V}\to\mathbf{Y}} q_i = (q_n/p_n)p_i$. Это означает, что $\lim\limits_{\mathbf{V}\to\mathbf{Y}} \mathbf{q}^* = (q_n/p_n)\mathbf{p}^* = c\mathbf{p}^*$. Теорема доказана.

Теорема 3 (о вырожденной матрице). Пусть $\mathbf{V}$ – произвольная невырожденная матрица размерностью $n\times n$, w_{ij} – коэффициент i-й строки и j-го столбца матрицы $\mathbf{W} = \mathbf{V}^{-1}$, матрица $\mathbf{Y}$ размерностью $n\times n$ вырождена и имеет ранг $n-1$, вектор $\mathbf{p}^*$ – любое нетривиальное решение системы уравнений $\mathbf{Yp} = \mathbf{0}$, p_i – коэффициент i-й строки вектора $\mathbf{p}$. Тогда $\lim\limits_{\mathbf{V}\to\mathbf{Y}} w_{gj}/w_{hj} = p_g/p_h$ для любого j, для которого существует базисный минор матрицы $\mathbf{Y}$, не содержащий строки j.

Доказательство. В матрице $\mathbf{W}$ j-й столбец может быть определён как $\mathbf{w}_j = \mathbf{WI}_j$, где $\mathbf{I}_j$ – вектор, состоящий из нулей, за исключением единицы в j-й строке. Отсюда $\mathbf{Vw}_j = \mathbf{I}_j$. Вычеркнув из этого соотношения и уравнения $\mathbf{Yp} = \mathbf{0}$ j-е строки и отождествив w_{ij} с q_i, приходим к случаю, рассмотренному в теореме (2), в соответствии с которым $\lim\limits_{\mathbf{V}\to\mathbf{Y}} \mathbf{w}_j = c\mathbf{p}^*$, или $\lim\limits_{\mathbf{V}\to\mathbf{Y}} w_{gj}/w_{hj} = p_g/p_h$ для любого j-го столбца матрицы $\mathbf{W}$ при условии, что существует базисный минор матрицы $\mathbf{Y}$, не содержащий строки j. Теорема доказана.

Определение. *Строго базисной строкой* называется строка, которую содержат все базисные миноры данной матрицы.

Теорема 4 (о строго базисной строке). Если в матрице $\mathbf{Y}$ имеется i-я строго базисная строка, то в решении уравнения $\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ x_i тождественно равно нулю. Если x_i тождественно равно нулю, то i-я строка является строго базисной.

Доказательство. Если $x_i \neq 0$, это означает, что i-я строка является линейной комбинацией некоторых строк матрицы $\mathbf{Y}$, следовательно, существует базисный минор, не содержащий данной строки, что противоречит посылке о том, что i-я строка является строго базисной.

Если x_i тождественно равно нулю, значит, не существует ни одного способа выразить i-ю строку через другие строки матрицы $\mathbf{Y}$, т.е. она линейно независима от них. Если бы она могла находиться вне базиса, то, согласно теореме о базисном миноре, она должна была бы быть представлена в виде линейной комбинации базисных строк, но это невозможно. Следовательно, i-я строка является строго базисной.

Теорема доказана.

Из теорем о вырожденной матрице и о строго базисном столбце применительно к задачам (2) и (3) вытекает следующее. Пусть $\mathbf{V} \to \mathbf{A}$, $\mathbf{W} = \mathbf{V}^{-1}$.

1. Соотношения любых двух коэффициентов любого h-го столбца матрицы $\mathbf{W}$ стремятся к соотношению соответствующих переменных задачи (2) и, следовательно, соответствующих переменных задачи (1), если только h-я строка матрицы $\mathbf{A}$ не является строго базисной.

2. Если значение j-й базисной переменной задачи (1) равно нулю, то соотношения двух коэффициентов j-го столбца матрицы $\mathbf{W}$ не обязательно стремятся к соотношению соответствующих двойственных переменных задачи (1). Если соотношения двух коэффициентов j-го столбца матрицы $\mathbf{W}$ не стремятся к соотношению соответствующих двойственных переменных задачи (1), то j-я переменная задачи (1) в данном базисе равна нулю.

3. Соотношения любых двух коэффициентов любой h-й строки матрицы $\mathbf{W}$ стремятся к соотношению соответствующих переменных задачи (3) и, следовательно, двойственных переменных задачи (1), если только h-й столбец матрицы $\mathbf{A}$ не является строго базисным.

4. Если значение i-й базисной двойственной переменной задачи (1) равно нулю, то соотношения двух коэффициентов i-й строки матрицы $\mathbf{W}$ не обязательно стремятся к соотношению соответствующих переменных задачи (1). Если соотношения двух коэффициентов i-й строки матрицы $\mathbf{W}$ не стремятся к соотношению соответствующих переменных задачи (1), то i-я двойственная переменная задачи (1) в данном базисе равна нулю.

Предположим, что в задаче (1) строки соответствуют балансам экономических благ, а столбцы — способам (процессам, технологиям) преобразования экономических благ. Назовём процесс, интенсивность которого не равна тождественно нулю, *используемым процессом*, а благо, двойственная оценка которого не равна тождественно нулю, — *ценным благом*.

Все ограничения задачи (1), вошедшие в задачу (2), а равно и ограничения задачи, двойственной к (1), вошедшие в задачу (3), выполняются как строгие равенства. Поэтому правый столбец задачи (2) можно интерпретировать как вектор процесса, принадлежащего среде экономической системы и перерабатывающего выходные блага во входные с интенсивностью, равной единице[4], а нижнюю строку — просто как одно из благ. При этом строку можно считать описывающей поток полезного блага, если соответствующая переменная задачи (3) больше нуля, либо поток антиблага, которое приносит вред, если меньше.

Матрица $\mathbf{V} \to \mathbf{A}$ описывает некоторый неоптимальный с точки зрения задачи (1) баланс благ, в котором присутствуют резервы и дефициты. Коэффициент w_{ij} матрицы $\mathbf{W}$ может трактоваться как величина прироста интенсивности j-го процесса, необходимого для увеличения выпуска i-го блага на единицу при наличии упомянутых резервов (дефицитов), а также как величина прироста двойственной оценки j-го блага, необходимого для увеличения прибыли i-го процесса на единицу.

В соответствии с теоремой о вырожденной матрице, чем меньше матрица $\mathbf{V}$ отличается от $\mathbf{A}$, тем ближе будут соотношения коэффициентов столбца матрицы $\mathbf{W}$ к соотношениям интенсивностей соответствующих процессов, а соотношения коэффициентов её строки — к

[4] Если задача (1) имеет оптимальное решение, то правый столбец задачи (2) не может быть строго базисным.

соотношениям двойственных оценок (при условии, что строка (столбец) не является строго базисной). Это означает:

соотношения двойственных оценок благ задачи (1) есть величины, к которым стремятся соотношения приростов интенсивностей используемых процессов, необходимых для производства единичного количества этих благ при всё более полном использовании резервов (устранении дефицитов), иными словами, при приближении к оптимуму;

соотношения интенсивностей процессов задачи (1) есть величины, к которым стремятся соотношения приростов двойственных оценок ценных благ, необходимых для увеличения прибыли данных процессов на единицу при приближении к оптимуму.

Особо важную роль играет первое из этих двух утверждений. Оно устанавливает существование и форму непосредственной материальной основы величин объективно обусловленных оценок: одно благо оказывается дороже другого для данной экономической системы во столько раз, во сколько раз больше прирост интенсивности любого используемого процесса (а следовательно, и затраты учитываемых в модели благ) для производства единицы первого блага по сравнению со вторым.

Во вспомогательных задачах (2) и (3) строки целевых функций ничем не отличаются от других строк. Поскольку вспомогательные задачи для оптимальных решений взаимных задач линейного программирования совпадают, двойственные переменные решения взаимных задач совпадают с точностью до масштаба. По мнению автора, это означает, что существование единственных для данного базиса векторов оптимального плана и двойственных оценок обусловлено не наличием целевой функции в ЛЭММ, а фактом полного использования материальных резервов в системе потоков благ ЛЭММ. Это утверждение, носящее на данном этапе исследования форму научной гипотезы, имеет следствием принципиальную возможность существования объективных цен в системах, не располагающих внешним по отношению к ним критерием стоимости, подобным целевой функции ЛЭММ.