Министерство сельского хозяйства и продовольствия
Российской Федерации
Московская сельскохозяйственная академия им. К.А. Тимирязева

УДК

Светлов Н.М.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРЕДЕЛЬНЫХ ИЗДЕРЖЕК И ЦЕНЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛИ МЕЖОТРАСЛЕВОГО РАВНОВЕСИЯ

1. Проблема детерминант предельных издержек и цены

Современная теория издержек оставляет открытым вопрос о том, какой набор параметров экономической системы полностью определяет предельные издержки производства некоторого данного продукта. Все гипотезы, касающиеся этого вопроса, можно разделить на две группы.

Согласно одной, предельные издержки производства данного продукта в данной экономической системе не могут быть однозначно определены, если не заданы экзогенно цены на некоторое множество других продуктов. Следуя ей, мы должны признать более или менее субъективный либо случайный характер всей системы цен, поскольку цены не определяются в полной мере материальными пропорциями в сфере общественного производства.

Другая гипотеза гласит, что для однозначного определения предельных издержек производства всех продуктов достаточно экзогенно задать цену любого из них. В этом случае соотношения предельных издержек, а следовательно, и цен двух любых

Москва 1996

продуктов определяются только некоторыми причинами, скрытыми в воспроизводственном процессе, т.е. носят объективный характер[1].

Хотя принято считать, что неоклассическая школа тяготеет к первой гипотезе, многие крупнейшие её представители не находят решающих аргументов в её подтверждение, не отдавая предпочтения ни одной, ни другой. Экономические школы, приверженные второй гипотезе, к числу которых относится большинство школ, существовавших до середины прошлого века, а из ныне распространённых – марксизм, не располагают моделями формирования связей между параметрами воспроизводства и ценами: остаётся неясным, что движет "невидимой рукой".

Благодаря трудам Л.В. Канторовича можно считать доказанным существование объективно обусловленных цен в системах, изоморфных используемой им модели, носящей весьма общий характер, но предполагающей существование единственной экзогенно заданной целевой функции. Однако поведение экономических систем регионального, национального масштаба и более крупных не поддаётся описанию в терминах модели Канторовича. Хотя доказано, что в условиях совершенной конкуренции свободный выбор многочисленных субъектов рынка обусловливает поведение, описываемое системой уравнений и неравенств при заданной единственной целевой функции "максимум темпов роста совокупного общественного благосостояния", эта система не является моделью Канторовича, поскольку её целевая

[1] Ни одна из гипотез не отрицает влияния субъективных предпочтений людей на систему цен. Речь идёт только о том, остаётся ли свобода выбора той или иной системы цен после того, как заданы технологии производства и предпочтения людей.

функция не задаётся экзогенно: в неё неизбежно входят объективно обусловленные оценки тех самых продуктов, по которым их требуется определить.

В настоящей статье приводится ряд аргументов в пользу гипотезы об объективной природе предельных издержек и цен в экономических системах данного типа.

2. Математическая модель межотраслевого равновесия в замкнутой экономической системе

Для изучения детерминант предельных издержек автором предложена специальная экономико-математическая модель. Она основана на предположении, что все отрасли некоторой экономической системы находятся в состоянии рыночного равновесия. Главным предметом изучения являются свойства этого состояния, в первую очередь предельные издержки производства. Поэтому модель межотраслевого равновесия абстрагируется от многих параметров экономической системы, не имеющих отношения к формированию предельных издержек.

Модель основана на следующих предпосылках.

1. *Продуктом* будем считать любое экономическое благо, возникающее в результате процесса производства. Множество всех продуктов обозначим через C, а их количество — через n.

2. *Технологией* будем называть один из возможных способов производства некоторого продукта. Технология определяется размерами прямых затрат всех продуктов, необходимых для выпуска единицы данного продукта (обозначаются a_{ijl}, где i — данный продукт, j — сырьё для его производства, l — индекс технологии производства i-го продукта). Множество технологий производства

данного продукта обозначим T_i, $i \in C$; $T = \bigcup_{i \in C} T_i$ — множество всех технологий.

3. Каждая отрасль выпускает единственный продукт; каждый продукт выпускается единственной отраслью. Блага, не являющиеся продуктами, в модели не отражаются.

4. Каждая отрасль стремится к максимизации прибыли.

5. *Интенсивность технологии* (t_{il}) — количество продукта i, выпускаемого по данной технологии в единицу времени. Интенсивность технологии зависит от наличия запасов продуктов согласно закону $t_{il} = \min_{i \in C} \frac{s_{ijl}}{d_{ijl}}$, где s_{ijl} — запас j-го продукта, используемый l-й технологией производства i-го продукта, d_{ijl} - норма запаса j-го продукта на единицу интенсивности l-й технологии производства i-го продукта.

6. Экономическая система считается вполне определённой, если определены множества C и T_i, коэффициенты a_{ijl}, величины s_{ijl} и d_{ijl}.

7. Во всех отраслях достигнута ситуация частичного конкурентного равновесия, характеризующаяся равенством предельных издержек и предельной выручки[2].

Предпосылка 7 математически записывается в форме следующей системы уравнений:

[2] Для дальнейшего изложения несущественно, каким образом достигнуто это состояние и могут ли существовать другие состояния равновесия, а также может ли быть достигнуто равенство предельных издержек и предельной выручки в неравновесном состоянии.

$$\forall i \in C \quad p_i = \sum_{j\in C} a'_{ij} p_j + r \sum_{j \in C} d'_{ij} p_j \qquad (1).$$

Здесь p_i и p_j - предельные издержки производства i-го и j-го продуктов соответственно, r — альтернативная стоимость капитала, a'_{ij} и d'_{ij} — соответственно прямые затраты и нормы запаса j-го продукта для наихудшей технологии производства i-го продукта, ещё используемой i-й отраслью, остальные обозначения прежние. Первое слагаемое обозначает текущие затраты, необходимые для выпуска дополнительной единицы продукции. Второе — доходный эквивалент капитальных затрат (т.е. прироста запасов), необходимых для увеличения интенсивности l-й технологии производства i-го продукта на единицу. Всё уравнение означает равенство предельной выручки предельным издержкам.

Размерность каждого уравнения, а следовательно, каждого слагаемого правой части каждого уравнения, -

$$\frac{\text{денежная единица}}{\text{единица продукции } i\text{-го вида}}.$$

Например, руб./шт. или руб./ц.

Размерность первого слагаемого складывается из размерности p_j —

$$\frac{\text{денежная единица}}{\text{единица продукции } j\text{-го вида}}$$

и a'_{ij} —

$$\frac{\text{единица продукции } j\text{-го вида}}{\text{единица продукции } i\text{-го вида}}.$$

Размерность второго слагаемого складывается из размерности p_j, d'_{ij} —

$$\frac{\text{единица продукции } j\text{-го вида}}{[\text{единица продукции } i\text{-го вида}]/[\text{единица времени}]}$$

и r — 1/[единица времени]. Разумеется, единицы измерения количества продукции i-го или j-го вида должны быть одинаковы для данного вида продукции. Одинаковы во всех случаях должны

быть и единицы времени (например, год), и денежные единицы (например, рубль).

Данная модель допускает очень широкую трактовку понятия "межотраслевое равновесие", позволяющую считать, что любая экономическая система, функционирующая в условиях сохраняющегося достаточно продолжительное время баланса спроса и предложения, пребывает в состоянии равновесия.

3. Предельные издержки

Для анализа модели межотраслевого равновесия целесообразно использовать матричную запись. Пусть $\mathbf{p}$ — вектор предельных издержек, $\mathbf{A}$ — квадратная $n \times n$-матрица прямых затрат, отражающая единственную технологию производства каждого продукта (коэффициенты, соответствующие одной технологии, расположены в одной строке), $\mathbf{D}$ — квадратная $n \times n$-матрица норм запасов на прирост интенсивности соответствующих технологий. Тогда система уравнений (1) может быть записана в виде

$$\mathbf{p} = \mathbf{Ap} + r\mathbf{Dp} \qquad (2),$$

откуда

$$\mathbf{Ep} = \mathbf{Ap} + r\mathbf{Dp},$$

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A} - r\mathbf{D})\mathbf{p} = \mathbf{0} \qquad (3)$$

($\mathbf{E}$ — единичная матрица).

Решая относительно $\mathbf{p}$, получаем, что либо $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, либо матрица $\mathbf{E} - \mathbf{A} - r\mathbf{D}$ (обозначим её $\mathbf{Z}$) вырождена. С экономической точки зрения вырожденность матрицы $\mathbf{Z}$ означает, что совокупность технологий, характеризуемых этой матрицей, такова, что при любой их интенсивности невозможно получить чистый выпуск.

Исключить случай $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, не представляющий теоретического интереса, несложно, введя условие $\sum_{j\in C} p_j = 1$ или ему подобное. Одновременно от бесконечного количества векторов $\mathbf{p}$, удовлетворяющих уравнению (3), переходим к единственному[3]. Тогда предельные издержки могут быть вычислены посредством уравнения

$$\mathbf{Z}'\mathbf{p} = \mathbf{I},$$

где $\mathbf{Z}'$ — матрица, полученная путём замены любой небазисной строки матрицы $\mathbf{Z}$ строкой единиц, а $\mathbf{I}$ — вектор, полученный из $\mathbf{0}$ путём замены в той же самой строке нуля на единицу. Отсюда

$$\mathbf{p} = (\mathbf{Z}')^{-1}\mathbf{I} .$$

Таким образом, вектор предельных издержек — это столбец матрицы $(\mathbf{Z}')^{-1}$, имеющий тот же номер, что и заменённая строка матрицы $\mathbf{Z}'$.

Пусть матрица $\mathbf{V} \to \mathbf{Z}$ (т.е. (а) размерности обеих матриц одинаковы; (б) det $\mathbf{V} \neq 0$ и (в) для всех коэффициентов v_{ij} матрицы $\mathbf{V}$ выполняется условие $|v_{ij}-z_{ij}| \le \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \to 0$)[4]. Пусть

[3] Для всех экономически осмысленных задач хотя бы один базисный минор матрицы $\mathbf{Z}$ отвечает условиям продуктивности, сформулированным применительно к модели Леонтьева. Поэтому любой вектор $\mathbf{p}$, являющийся нетривиальным решением (3), состоит из элементов, имеющих одинаковый знак. Следовательно, вектор $\mathbf{p}$, удовлетворяющий условию $\sum_{j\in C} p_j = 1$, существует и единственен.

[4] Далее символ $\to$ будем использовать по отношению к матрицам только в этом смысле (коэффициенты матрицы, стоящей слева от символа, неограниченно стремятся к коэффициентам матрицы, стоящей справа, причём левая матрица остаётся невырожденной).

$\mathbf{W} = \mathbf{V}^{-1}$, w_{ij} — коэффициенты матрицы $\mathbf{W}$. Тогда если rang $\mathbf{Z} = n-1$, то для любых продуктов g, h, j верно соотношение $\lim_{\mathbf{V}\to\mathbf{Z}} w_{gj}/w_{hj} = p_g/g_h$. Ниже приведено доказательство этого утверждения.

Теорема (1). Для любой матрицы $\mathbf{Y}$, имеющей размерность $n\times n$, некоторого её минора, имеющего размерность $(n-1)\times(n-1)$, и сколь угодно малого положительного числа ε существует такая $n\times n$-матрица $\mathbf{V}$, что (а) для всех её коэффициентов v_{ij} выполняется условие $|v_{ij}-y_{ij}|\le\varepsilon$, (б) det $\mathbf{V} \neq 0$, (в) минор $\mathbf{M}_v$ матрицы $\mathbf{V}$, соответствующий[5] выбранному минору $\mathbf{M}_y$ матрицы $\mathbf{Y}$, не равен нулю.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда все элементы главной диагонали минора $\mathbf{M}_y$ являются элементами главной диагонали матрицы $\mathbf{Y}$.

Пусть матрица $\mathbf{V}$ образована по правилу $\mathbf{Y}-\varepsilon\mathbf{E}$. Тем самым она соответствует условию (а). Заметив, что все собственные значения матрицы $\varepsilon\mathbf{E}$ равны ε, представим матрицу $\mathbf{V}$ в виде двучлена $-\varepsilon\mathbf{Y}^0+\mathbf{Y}^1$ и применим формулу собственного значения матричного многочлена: $\lambda(\mathbf{V}) = -\varepsilon\lambda(\mathbf{Y}^0)+\lambda(\mathbf{Y}^1) = -\varepsilon+\lambda(\mathbf{Y})$, (здесь $\lambda(\mathbf{X})$ — некоторое (любое) собственное значение матрицы $\mathbf{X}$). Аналогично для миноров: $\lambda(\mathbf{M}_v) = -\varepsilon\lambda(\mathbf{M}_y^0)+\lambda(\mathbf{M}_y^1) = = -\varepsilon+\lambda(\mathbf{Y})$. Отсюда очевидно, что если ε меньше наименьшего из числа положительных собственных значений матрицы $\mathbf{Y}$ и её минора $\mathbf{M}_y$ то в числе собственных значений матрицы $\mathbf{V}$ и минора $\mathbf{M}_v$ не будет ни одного нулевого, следовательно, выполняются условия (б) и (в).

[5] т.е. составленный из строк и столбцов с теми же номерами, что и $\mathbf{M}_y$.

Если ни $\mathbf{Y}$, ни $\mathbf{M}_y$ не имеют положительных собственных значений, то матрицы $\mathbf{V}$ и $\mathbf{M}_v$ не вырождены при любом положительном ε.

Теперь предположим, что минор $\mathbf{M}_y$ в матрице $\mathbf{Y}$ выбран произвольным образом. Положим, в минор не вошли i-я строка и j-й столбец. Рассмотрим матрицу $\mathbf{Y}'$, полученную из матрицы $\mathbf{Y}$ путём взаимозамены i-й и j-й строк. Выберем в ней минор $\mathbf{M}_y'$ таким образом, что в него не входят j-е столбец и строка. Элементы главной диагонали этого минора будут принадлежать главной диагонали матрицы $\mathbf{Y}'$. Очевидно, что определители матриц $\mathbf{Y}'$ и $\mathbf{M}_y'$ отличаются от определителей матриц $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{M}_y$ разве что знаком, поскольку первые получены из вторых путём перестановки строк, а для $\mathbf{Y}'$ и $\mathbf{M}_y'$ теорема уже доказана. Следовательно, для любой матрицы $\mathbf{Y}$ и сколь угодно малого положительного ε существует хотя бы одна $\mathbf{V}$, отвечающая условиям (а), (б) и (в).

Теорема (2). Пусть $\mathbf{Y}_k$ – матрица размерностью $(n-1)\times n$, имеющая ранг $n-1$, полученная вычёркиванием k-й строки из произвольной $n\times n$-матрицы $\mathbf{Y}$; $\mathbf{V}_k$ – матрица, полученная вычёркиванием той же строки из $\mathbf{V} \to \mathbf{Y}$; $\mathbf{q}^*$ – нетривиальное решение уравнения $\mathbf{V}_k\mathbf{q} = \mathbf{0}$; $\mathbf{p}^*$ – нетривиальное решение уравнения $\mathbf{Y}_k\mathbf{p} = \mathbf{0}$. Тогда $\lim\limits_{\mathbf{V}\to\mathbf{Y}} \mathbf{q}^* = c\mathbf{p}^*$, где c – некоторая константа ($c \neq 0$).

Доказательство. Выберем в $\mathbf{Y}_k$ базисный минор $\mathbf{M}_y$. Соответствующий минор матрицы $\mathbf{V}_k$ обозначим $\mathbf{M}_v$. В соответствии с теоремой (1) $\mathbf{V}$ может быть выбрана таким образом, чтобы $\det \mathbf{M}_v \neq 0$. Обозначим через $\mathbf{y}_f$ столбец матрицы $\mathbf{Y}_k$, не вошедший в базисный минор и имеющий номер f; через $\mathbf{v}_f$ – соответствующий столбец матрицы $\mathbf{V}_k$.

Нетривиальные решения уравнений $\mathbf{Y}_k\mathbf{p} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{V}_k\mathbf{q} = \mathbf{0}$ можно найти из уравнений $\mathbf{M}_y\mathbf{p}_f^* = -p_f\mathbf{y}_f$ и $\mathbf{M}_v\mathbf{q}_f^* = -q_f\mathbf{v}_f$ соответственно, где $\mathbf{p}_f^*$ – вектор, полученный из $\mathbf{p}^*$ путём вычёркивания f-го

элемента, p_f – f-й элемент вектора $\mathbf{p}^*$, $\mathbf{q}_f^*$ – вектор, полученный из $\mathbf{q}^*$ путём вычёркивания f-го элемента, q_f – f-й элемент вектора $\mathbf{q}^*$. При этом значения p_f и q_f могут быть выбраны произвольно, лишь бы они не были равны нулю.

По формуле Крамера для любого $i = 1\ldots n$ имеем

$$q_i = (\mathbf{M}_v)_i/\mathbf{M}_v \ ,$$

$$p_i = (p_n/q_n)\times[(\mathbf{M}_y)_i/\mathbf{M}_y] \ ,$$

где $(\mathbf{M}_v)_i$ – определитель, полученный из $\mathbf{M}_v$ путём замены его i-го столбца на столбец $-q_f\mathbf{v}_f$, $(\mathbf{M}_y)_i$ – определитель, полученный из $\mathbf{M}_y$ путём замены его i-го столбца на столбец $-p_f\mathbf{y}_f$. Заметив, что $\lim\limits_{\mathbf{V}\to\mathbf{Y}} (\mathbf{M}_v)_i = (\mathbf{M}_y)_i$, поскольку $\lim\limits_{\mathbf{V}\to\mathbf{Y}} \mathbf{M}_v = \mathbf{M}_y$ и $\lim\limits_{\mathbf{V}\to\mathbf{Y}} \mathbf{v}_n = \mathbf{y}_n$, получаем, что $\lim\limits_{\mathbf{V}\to\mathbf{Y}} q_i = (q_n/p_n)p_i$. Это означает, что $\lim\limits_{\mathbf{V}\to\mathbf{Y}} \mathbf{q}^* = (q_n/p_n)\mathbf{p}^* = = c\mathbf{p}^*$, что и требовалось доказать.

Теорема (3). Пусть $\mathbf{V}$ – произвольная невырожденная матрица размерностью $n\times n$, w_{ij} – коэффициент i-й строки и j-го столбца матрицы $\mathbf{W} = \mathbf{V}^{-1}$, матрица $\mathbf{Y}$ размерностью $n\times n$ вырождена и имеет ранг $n-1$, вектор $\mathbf{p}^*$ – любое нетривиальное решение системы уравнений $\mathbf{Yp} = \mathbf{0}$, p_i – коэффициент i-й строки вектора $\mathbf{p}$. Тогда $\lim\limits_{\mathbf{V}\to\mathbf{Y}} w_{gj}/w_{hj} = p_g/p_h$ для любого j.

Доказательство. Рассмотрим матрицу $\mathbf{W}$. Её j-й столбец может быть определён как $\mathbf{w}_j = \mathbf{WI}_j$, где $\mathbf{I}_j$ – вектор, состоящий из нулей, за исключением единицы в j-й строке. Отсюда $\mathbf{Vw}_j = \mathbf{I}_j$. Вычеркнув из этого соотношения j-ю строку и отождествив w_{ij} с q_i, приходим к случаю, рассмотренному в теореме (2), в соответствии с которым $\lim\limits_{\mathbf{V}\to\mathbf{Y}} \mathbf{w}_j = c\mathbf{p}^*$, или $\lim\limits_{\mathbf{V}\to\mathbf{Y}} w_{gj}/w_{hj} = p_g/p_h$ для любого j-го столбца, что и требовалось доказать.

Из теоремы (3) следует, что при $\operatorname{rang} \mathbf{Z} = n-1$ соотношение предельных издержек производства g-го и h-го продуктов в состоянии межотраслевого равновесия равно пределу w_{gj}/w_{hj} при $\mathbf{V} \to \mathbf{Z}$ для любого j[6]. При этом значения w_{gj}/w_{hj} приобретают смысл соотношений полных предельных затрат (включающих доходный эквивалент капитальных затрат) j-го продукта на единицу интенсивности технологий производства g-го и h-го продуктов. Сами полные предельные затраты в расчёте на единицу интенсивности технологии бесконечно велики (что означает невозможность получения чистого выпуска при любой интенсивности предельных технологий). Но соотношения полных затрат любого продукта на производство двух других продуктов конечны и однозначно определены для данной матрицы $\mathbf{Z}$.

Из теоремы (3) также следует, что соотношения полных предельных затрат любого ресурса на производство двух данных продуктов одинаковы. Следовательно, полные предельные затраты любого продукта на производство данного могут трактоваться как полные предельные материальные издержки производства данного продукта.

Утверждение, согласно которому продукт A сто́ит вдвое дороже продукта B потому, что экономика несёт вдвое большие затраты на единицу продукта A, нежели на единицу продукта B,

[6] Вероятность того, что rang $\mathbf{Z} < n-1$, невелика. В общем случае для вычисления предельных издержек производства всех продуктов требуется экзогенное задание цен на (n - rang $\mathbf{Z}$) видов продуктов. Если rang $\mathbf{Z} = n-1$, система цен полностью детерминирована матрицей $\mathbf{Z}$ (изменяться может только масштаб цен), т.е. объективна. В остальных случаях система цен не полностью детерминирована объективными факторами, так как соотношение цен хотя бы двух товаров оказывается произвольным.

выглядевшее неубедительным применительно к модели межотраслевого равновесия при её записи в форме баланса прямых предельных издержек, теперь становится очевидным, так как полные предельные издержки любого ресурса на единицу продукта A оказываются ровно в два раза больше, чем на единицу B.

4. Альтернативная стоимость капитала

Модель (4) не позволяет определить альтернативную стоимость капитала (r), её величина предполагается заданной. Однако при посредстве модели межотраслевого равновесия удаётся получить ряд результатов, позволяющих составить более полное представление об экономической функции альтернативной стоимости капитала.

Назовём *кольцом технологий* систему, включающую ровно одну технологию производства каждого продукта. Условие (6) может быть записано для любого кольца технологий: если l является индексом не предельной, а некоторой заданной технологии производства i-го продукта, то

$$\forall i \in C \quad p_i = \sum_{j \in C} a_{ijl} p_j + r' \sum_{j \in C} d_{ijl} p_j \qquad (4).$$

В этом случае величины p не имеют смысла издержек, являясь лишь оценкой продуктов в данном кольце технологий; параметр r' не имеет смысла альтернативной стоимости капитала и является неизвестной величиной, поддающейся определению[7].

[7] В общем случае система (4), решаемая относительно r', имеет более одного корня. Экономический смысл имеет наименьшее положительное значение r'.

Для каждого кольца технологий величина r' означает (а) норму возмещения финансового капитала, (б) норму физического возмещения запасов. Действительно, запишем систему уравнений баланса продукции кольца технологий:

$$\forall j \in C \quad t_j = \sum_{i \in C} a_{ijl} t_i + r' \sum_{i \in C} d_{ijl} t_i,$$

или в матричной форме

$$\mathbf{t} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{t} + r' \mathbf{D}^{\mathrm{T}} \mathbf{t}.$$

Отсюда

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}} - r' \mathbf{D}^{\mathrm{T}}) \mathbf{t} = \mathbf{0} \qquad (5).$$

Система уравнений (4) является двойственной по отношению к (5). Из их сопоставления очевидно, что в обоих случаях выражение в скобках представляет собой вырожденную матрицу, а системы уравнений имеют нетривиальные решения при численно одинаковом значении r'.

В выражении (4) r' является нормативом возмещения финансового капитала, величиной, обратной сроку окупаемости капитального вложения в любую технологию данного кольца. В выражении (5) r' — величина, представляющая собой отношение количества любого продукта из множества C, которое можно направить на прирост запасов за единицу времени, к имеющемуся его запасу, то есть максимально достижимый темп роста запасов в данном кольце технологий, или норма возмещения физического капитала. В обоих случаях r' измеряется в единицах частоты (например, 1/год) и имеет одинаковое значение.

Соотношения (4) и (5) верны и для кольца технологий (3), составленного из наихудших технологий, которые ещё имеет смысл использовать каждой отрасли. В этом кольце технологий величины

p приобретают смысл предельных издержек, а $r' = r$ — смысл альтернативной стоимости капитала.

Таким образом, нормы возмещения финансового капитала и физических запасов для каждого кольца технологий (и в целом в экономической системе) совпадают. Следовательно, альтернативная стоимость капитала (каков бы ни был механизм формирования её величины и, соответственно, предельного кольца технологий), представляет собой одновременно норму окупаемости финансового капитала и физического возмещения запасов в предельном кольце технологий.

Заметим, что элементы вектора $\mathbf{t}$ могут рассматриваться как интенсивности, обеспечивающие сбалансированность выпуска в кольце технологий. В рамках предпосылок модели эти величины в общем случае интереса не представляют, поскольку допускается существование других колец технологий, а сбалансированность экономической системы предполагает равенство всех затрат каждого продукта всему его выпуску и вовсе не требует подобного равенства в отдельно взятом кольце технологий. В частном случае, когда данное кольцо технологий является предельным, эти величины могут быть интерпретированы как пропорции приростов интенсивностей технологий, соответствующие малому дополнительному выпуску продукции любой отрасли.

Если экзогенно задана некоторая величина r, то в экономической системе будут функционировать только те кольца технологий, для которых $r' > r$, а все кольца технологий с $r' = r$ будут являться предельными. В случае, если такое кольцо не единственное, величины p определяются не матрицей $\mathbf{Z}_L$, характеризующей единственное предельное кольцо технологий L, а системой уравнений вида

$$\forall i \in C \quad p_i = \sum_{j \in C} a''_{ij} p_j + r \sum_{j \in C} d''_{ij} p_j \qquad (6),$$

в которой

$$a''_{ij} = \sum_{l \in L_i \cap Q} v_{il} a_{ijl}, \quad d''_{ij} = \sum_{l \in L_i \cap Q} v_{il} d_{ijl},$$

$$v_{il} = \frac{\partial t_{il}}{\partial \sum_{l \in L_i \cap Q} t_{il}}.$$

Здесь Q — множество технологий, входящих хотя бы в одно предельное кольцо технологий; L_i - множество всех технологий производства i-го продукта. Коэффициенты v_{il} означают долю прироста общего выпуска i-го вида продукции, полученного за счёт l-й технологии.

Если матрица $\mathbf{A}$ составлена из коэффициентов a''_{ij}, а $\mathbf{D}$ — из коэффициентов d''_{ij}, то системе (6), как и системе (3), присуще соотношение $\lim\limits_{\mathbf{V} \to \mathbf{Z}} w_{gj}/w_{hj} = p_g/p_h$. Для неё также верны все остальные выводы, полученные выше.

Примем в качестве критерия функционирования экономической системы, изоморфной модели (1…7), максимум скорости роста капитальной стоимости либо (что то же самое) максимум скорости накопления запасов при условии сохранения сбалансированности их структуры. Предположим, что экономическая система находится в состоянии оптимума по данному критерию. Тогда величина r для предельного кольца (или колец) технологий приобретает смысл объективно обусловленной оценки (а) совокупной стоимости запасов (капитала), (б) физического размера капитала (при условии сбалансированности его структуры). Действительно, дополнительная малая капитальная стоимость K, вложение которой

осуществляется в соответствующую модели экономическую систему, увеличивает на rK доход за один экономический цикл. При этом дополнительная капитальная стоимость K представляет собой сбалансированные по структуре физические запасы s_{ijl}, а стоимости rK — приросты физических запасов rs_{ijl}, выраженные в деньгах.

5. Регулируемые цены и налоги в модели межотраслевого равновесия

Предположим, что на некоторое множество продуктов C' цены заданы экзогенно и равны p'_i. Тогда условие (3) в общем случае может быть выполнено только для множества колец технологий, для которых $\lim\limits_{\mathbf{V} \to \mathbf{Z}} w_{gj}/w_{hj} = p'_g/p'_h$ для любых $j \in C$ и $g, h \in C'$. Действительно, рассмотрим систему уравнений вида

$$\forall i \in C \quad p_i = \sum_{j \in C} a_{ijl} p_j + r \sum_{j \in C} d_{ijl} p_j,$$

$$\forall i \in C' \quad p_i = p'_i,$$

где переменными являются p_i и r. В соответствии с теоремой (3) эта система уравнений может обратиться в тождество лишь для такого кольца технологий, в котором $\lim\limits_{\mathbf{V} \to \mathbf{Z}} w_{gj}/w_{hj} = p'_g/p'_h$; $j \in C$; $g, h \in C'$.

Если в экономической системе существуют налоги и дотации, условие равновесия для некоторого кольца технологий можно записать в виде

$$\forall i \in C \quad p_i = \eta_i \left(\sum_{j \in C} a_{ijl} p_j + r \sum_{j \in C} d_{ijl} p_j \right).$$

Здесь η_i — нормы налогообложения (дотации) в i-й отрасли, выраженные в долевых единицах по отношению к прямым затратам. Они связаны с абсолютным размером налога в расчёте на единицу интенсивности технологии (обозначим его τ_i) выражением

$$\forall i \in C \quad \eta_i = \frac{\sum\limits_{j\in C} a_{ijl}\, p_j \; + \; r \sum\limits_{j\in C} d_{ijl}\, p_j + \tau_i}{\sum\limits_{j\in C} a_{ijl}\, p_j \; + \; r \sum\limits_{j\in C} d_{ijl}\, p_j} \; .$$

При налогообложении $\eta_i > 1$, $\eta_i < 1$ означает дотацию. Нормы налогообложения (дотаций) считаются заданными. В этом случае имеем

$$\mathbf{Hp} = \mathbf{Ap} + r\mathbf{Dp},$$

$$(\mathbf{H} - \mathbf{A} - r\mathbf{D})\,\mathbf{p} = \mathbf{0} \qquad (7),$$

где $\mathbf{H}$ – матрица, в которой на пересечении i-х строки и столбца стоит значение $1/\eta_i$, остальные элементы — нули.

Из соотношения (7) следует, что равновесие при заданных условиях может существовать (если существует соответствующее кольцо технологий хотя бы для одного значения r), p_i определяются точно так же, как и из соотношения (3), правило $\lim\limits_{\mathbf{V}\to\mathbf{Z}} w_{gj}/w_{hj} = p_g/p_h$ сохраняет силу при $\mathbf{Z} \to \mathbf{H} - \mathbf{A} - r\mathbf{D}$. Но величины w_{gj}/w_{hj} не имеют смысла соотношений коэффициентов полных технологических затрат (включающих осуществляемые с максимально достижимой для данного кольца технологий интенсивностью капитальные вложения), поскольку в составе w_{ij} присутствуют налоги и дотации. Изменение величин налогов (дотаций) приводит в общем случае к изменению предельного кольца технологий и альтернативной стоимости капитала.

Система уравнений (7), в отличие от (3), не является двойственной по отношению к (5), следовательно, вектор предельных издержек, полученный в результате решения системы (7), в рамках предпосылок 1…7 не является вектором объективно обусловленных оценок продуктов.

Итак, в модели, отвечающей предпосылкам 1…7, ситуация равновесия (относительно тех степеней свободы, которыми располагают отрасли) возможна в условиях рассмотренных экзогенных воздействий на цены при условии, что существует соответствующее данной системе цен кольцо технологий. Это утверждение не противоречит тезису классической экономической теории, согласно которому управляющее воздействие на цены выводит экономическую систему из равновесия. Действительно, даже если существует состояние равновесия, соответствующее новой системе цен, сложившееся и новое состояния равновесия могут характеризоваться существенно различными физическими структурами капитала. Поэтому по осуществлении регулирующего воздействия на цены экономической системы, находившейся в состоянии равновесия, переход к новому состоянию равновесия может быть весьма продолжительным.

Принципиальная возможность существования многих равновесных состояний (в рамках предпосылок модели) ставит вопрос о механизмах выбора одного из них, требует развития методологии сравнительного анализа тех или иных критериев оценки различных состояний равновесия и учёта полученных результатов при управлении народным хозяйством.

6. Особенности интерпретации модели межотраслевого равновесия

Изложенные выше результаты формального анализа модели межотраслевого равновесия верны только применительно к самой модели и на современном уровне её развития не допускают обобщения на реальную экономику. Назовём ряд причин.

Первая состоит в том, что модель межотраслевого равновесия абстрагируется от целого ряда существенных экономических проблем, как-то финансы, поведение экономических субъектов, перераспределение продуктов между различными кольцами технологий, внешнеэкономическая деятельность, риски и неопределённости и т.п. С одной стороны, если в некоторой модели, учитывающей перечисленные и другие подобные аспекты, но сохраняющей предпосылки 1…7, достигнута ситуация межотраслевого равновесия, то этому состоянию будут присущи все свойства, рассмотренные в настоящей работе. С другой, учёт этих аспектов может привести к тому, что в модели (безусловно, более соответствующей реальности) состояние межотраслевого равновесия вообще окажется невозможным.

Следующая причина состоит в жёсткости ряда предпосылок модели. Реальная экономика не замкнута; существуют не только однопродуктовые технологии; поведение отраслей не всегда определяется стремлением получить максимальную прибыль; некоторые технологии требуют наличия запасов не ниже некоторых минимумов, а связь интенсивности технологии с размерами запасов не всегда линейна. Поэтому результаты использования модели межотраслевого равновесия в качестве инструмента теоретических исследований либо экономического анализа сильно зависят от того, насколько существенную роль в экономике играют процессы, которые могут быть достаточно точно описаны в рамках предпосылок 1…7, с одной стороны, процессы, выходящие за рамки этих предпосылок, с другой. Хотя можно ожидать, что снятие или смягчение некоторых предпосылок (например, об однопродуктовом характере отрасли) не повлияет на полученные выводы, этот вопрос требует дополнительного исследования.

Модель абстрагируется от специфической экономической функции человека. Например, закон роста размеров трудовых ресурсов принципиально отличается от законов накопления любого другого продукта и представляет собой закон социальный, а не технологический. Равно и стоимость рабочей силы не может быть полностью объяснена в рамках экономической модели, без учёта социальных и психологических факторов. Это чревато возможностью неверного истолкования целого ряда результатов анализа модели (например, касающихся темпов роста экономических систем) применительно к реальной экономике.

Наконец, ещё одна причина состоит в том, что реальная экономика практически никогда не находится в состоянии межотраслевого равновесия. Ей присущи различные тенденции, некоторые из которых направлены в сторону равновесия, другие (инновации, стихийные бедствия, неполнота информации) систематически от него отклоняют. Реальное поведение экономических систем обусловлено сложным взаимодействием этих тенденций. Можно ли наблюдать свойства модели межотраслевого равновесия у реальных экономических систем, зависит от того, насколько существенны присущие последним отклонения от состояний межотраслевого равновесия.

Таким образом, результаты анализа модели межотраслевого равновесия требуют очень осторожной трактовки. Методологически обоснованным представляется применение математического аппарата модели межотраслевого равновесия в первую очередь в целях совершенствования теоретической картины межотраслевого равновесия, в синтезе с другими экономико-математическими методами и моделями. Использование этого аппарата в моделях конкретных экономических систем возможно, на наш взгляд, только после определения его места и роли в системе методов экономико-математического моделирования.

В настоящее время можно выдвинуть гипотезу, согласно которой модель даёт приемлемое для целей теоретического анализа описание экономической системы, рассматриваемой укрупнённо. Обнаруженные свойства предельных издержек можно будет наблюдать у продукции наиболее крупных отраслей при условии сбалансированности спроса на их продукцию и её предложения. В то же время связь предельных издержек производства, например, всего разнообразия товаров потребительского рынка с полными предельными материальными издержками, возможно, не будет проявляться в силу влияния вышеперечисленных причин.