СТОИМОСТЬ: ОБРАЗОВАНИЕ И СОДЕРЖАНИЕ

Н.М. Светлов

Предложена модель процесса образования стоимости. Показано, что общие для всех хозяйствующих субъектов стоимостные пропорции образуются в результате обменов, обусловленных стремлением субъектов к удовлетворению потребностей, независимо от того, определены ли для них какие-либо предпочтения. Образующаяся стоимость представляет собой предел нормированных полных затрат любого ограниченного блага, необходимых для выпуска единичного количества данного блага при технологических возможностях, стремящихся к представленным функциональной матрицей модели образования стоимости.

A model of a value formation process is suggested. It is shown that equal for all economic agents value ratios are formed as a result of exchanges conditioned by agents' aspiration to satisfy their demands, no matter whether preferences are defined or not. The resulting value is a limit of a normalized total input of any scarce good that is required to produce an unit of the given good under the technical conditions approaching those described by a functional matrix of the value formation model.

Ключевые слова: образование стоимости, детерминанты стоимости, технологии, моделирование, предпочтения, потребности.

Keywords: formation of value, determinants of value, technologies, modelling, preferences, demands.

В современной экономической теории цена рассматривается как составляющая сигнальной системы экономики, обеспечивающая обратную связь в информационном контуре управления. Считается, что цена — это информация об ограниченности (scarcity) блага — свойстве, обусловленном балансом спроса и предложения. Но поскольку и спрос, и предложение зависят от цен, эта трактовка может считаться удовлетворительной лишь за неимением более точной. Вопрос «о чём информирует цена?» остаётся открытым. Чтобы на него ответить, необходимо, во-первых, формально описать информационные процессы, сопутствующие образованию цен, во-вторых, исследовать связь цен с факторами, участвующими в их образовании.

Предпосылки решения этих двух задач составляют:

- метод описания процесса *образования* ценностных пропорций в процессе отыскания оптимального плана, предложенный Л.В. Канторовичем [1];
- метод анализа обмена между двумя субъектами, разработанный Ф. Эджуортом [6];
- теорема взаимности в математическом программировании А. Лурье [2], позволяющая переформулировать задачу векторного программирования (ЗВП) в эквивалентную ей задачу математического программирования, решаемую по единственному критерию (ЗМП), в предположении о том, что конкретный оптимум по Парето задан;
- понятие балансовой системы, введённое В.С. Немчиновым [3, с.306].

На этой основе разработан метод, основные составляющие которого перечислены ниже.

1. Процесс образовния стоимости представлен как процесс снятия свободы экономической системы совокупностью независимых управляющих воздействий со стороны хозяйствующих субъектов (включая органы государственного управления).

2. Введено понятие функции Лагранжа ЗВП. При посредстве теоремы взаимности в математическом программировании свойства функции Лагранжа ЗМП распространены на ЗВП.

3. Введено понятие функциональной матрицы ЗВП применительно к оптимуму по Парето.

4. Предложена математическая формализация балансовой системы, исследованы её свойства.

5. Предложен формализм для описания мотивации хозяйствующего субъекта, не требующий априорного задания его предпочтений.

Модель экономической системы, представленная ниже, отличается от классических теоретико-стоимостных моделей тем, что предпочтения хозяйствующих субъектов не определены. Предполагается, что субъекту присущи потребности — насущные, удовлетворяемые необходимо и полностью, и ненасущные, уровень удовлетворения каждой из которых максимизируется независимо. Технологическое множество каждого хозяйствующего субъекта для каждого момента времени включает процессы, которые могут начаться в этот момент времени, поскольку физически осуществимы, субъект владеет всеми необходимыми технологическими знаниями для их осуществления и они не будут ошибочно отвергнуты субъектом из-за его неточного представления об их параметрах. Согласно этому представлению, состояние субъекта всегда оптимально по Парето. Если он не реализовал в данный момент какое-либо решение, увеличивающее уровень удовлетворения его потребностей, значит, не обладал знаниями о возможности этого решения либо оно в этот момент было физически неосуществимо. Считается, что все экстерналии уже получены хозяйствующими субъектами и учтены в параметрах доступных им технологических процессов и в величинах поступления благ из среды, а прямые управляющие воздействия со стороны субъектов, являющихся органами государственного управления, ничем не отличаются от других экстерналий.

Переменные модели (x_{jkt}, $j \in J_{xkt}$; n_{jkt}, $j \in J_{nk}$; s_{jkt}, $j \in J_{sk}$, $e_{jkk't}$, $j \in J_{ekk't}$, $k' \in K \setminus \{k\}$), $k \in K$, $t \in T$ обозначают соответственно интенсивность технологического процесса j, контролируемого субъектом k, в момент времени t; уровень удовлетворения насущной потребности вида j субъекта k в момент t; уровень удовлетворения ненасущной потребности вида j субъекта k в момент t; интенсивность j-го варианта обмена между субъектами k и k', реализуемого в момент t.

Множества: T — целочисленное множество моментов времени, описываемых моделью, причём $\inf(T) = 0$ и $\sup(T) = \tau$; J_{xkt} — множество технологических процессов, определённое для каждого субъекта $k \in K$ и момента времени t; J_{nk} и J_{sk} — множества насущных и ненасущных потребностей субъекта k; I — множество благ; K — множество хозяйствующих субъектов. Элементы множества K соответствуют индивидууму, семейному хозяйству, фирме либо органу государственного управления. Z_{jk} — связное замкнутое множество векторов $\mathbf{z}_{jk} = (z_{ijk})$ затрат благ на удовлетворение насущной потребности $j \in J_{nk}$ субъекта k; $J_{ekk't}$ — множество доступных в момент t вариантов обмена между субъектами k и k'.

Отображения: $s_{jk}(\mathbf{s}_{kt})$ — функция, отображающая уровень удовлетворения ненасущных потребностей $\mathbf{s}_{kt} = (s_{jkt})$ на уровень насыщения ненасущной потребности j субъекта k; $v_{ijkt}(x_{jkt})$ — функция, отображающая интенсивность технологического процесса на неотрицательную величину затрат блага i, принадлежащего субъекту k; $w_{ijkt}(x_{jkt})$ — функция, отображающая интенсивность технологического процесса на неотрицательную величину выпуска блага i, принадлежащего субъекту k; $U_{jk}(s_{jkt})$ — отображение уровня удовлетворения ненасущной потребности $j \in J_{sk}$ на связное замкнутое множество неотрицательных векторов $u_{jkt} = (u_{ijkt})$ затрат благ, причём $U_{jk}(0) = \{\mathbf{0}\}$; $v_{ijkk't}(e_{jkk't})$ — функция, отображающая интенсивность j-го варианта обмена между субъектами k и k' на неотрицательную величину фактического расходования блага i субъектом k вследствие этого обмена; $w_{ijkk't}(e_{jk'kt})$ — функция, отображающая интенсивность j-го варианта обмена между субъектами k и k' на неотрицательную величину фактического поступления блага i субъекту k вследствие этого обмена. Все функции предполагаются дифференцируемыми, а границы множеств Z_{jk} и графиков отображений $U_{jk}(s_{jkt})$ — дифференцируемыми функциями от s_{jkt}.

Параметры: B_{ikt} — поступление блага $i \in I$ в собственность субъекта $k \in K$ в момент $t \in T$; B'_{ik} — запас блага i, которым располагает субъект i в момент 0; B''_{ik} — запас благ, резервируемый субъектом k в момент τ для использования в будущие периоды, N_{jkt} — необходимый уровень удовлетворения насущной потребности j субъекта k в момент t.

Модель предполагает максимизацию уровня удовлетворения ненасущных потребностей при условии полного удовлетворения насущных потребностей:

$$\max s_{jkt},\ j \in J_{sk}, k \in K, t \in T; \qquad (1)$$

$$n_{jkt} \geqslant N_{jkt},\ j \in J_{nk}, k \in K, t \in T. \qquad (2)$$

Ненасущные потребности могут быть насыщаемыми, а уровень насыщения зависит от уровня удовлетворения разнообразных ненасущных потребностей:

$$s_{jkt} \leqslant s_{jk}(\mathbf{s}_{kt}),\ j \in J_{sk}, k \in K, t \in T. \tag{3}$$

Каждую потребность можно удовлетворить различными наборами благ. Для ненасущной потребности удовлетворяющий её набор зависит от уровня удовлетворения. С учётом этих зависимостей баланс благ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j \in J_{nk}} z_{ijk} n_{jkt} + \sum_{j \in J_{sk}} u_{ijkt} + \sum_{k' \in K \setminus \{k\}} \sum_{j \in J_{ekk't}} v_{ijkk't}(e_{jkk't}) - \sum_{k' \in K \setminus \{k\}} \sum_{j \in J_{ek'kt}} w_{ijkk't}(e_{jk'kt}) + \\
&\qquad + \sum_{j \in J_{xkt}} v_{ijkt}(x_{jkt}) = B_{ikt} + B'_{ik}, \qquad i \in I, k \in K, t \in \{0\}; \\
&\sum_{j \in J_{nk}} z_{ijk} n_{jkt} + \sum_{j \in J_{sk}} u_{ijkt} + \sum_{k' \in K \setminus \{k\}} \sum_{j \in J_{ekk't}} v_{ijkk't}(e_{jkk't}) - \sum_{k' \in K \setminus \{k\}} \sum_{j \in J_{ek'kt}} w_{ijkk't}(e_{jk'kt}) - \\
&\qquad + \sum_{j \in J_{xkt-1}} v_{ijkt}(x_{jkt}) - \sum_{j \in J_{xkt}} w_{ijkt-1}(x_{jkt-1}) = B_{ikt}, i \in I, k \in K, t \in T \setminus \{0; \tau\}; \\
&\sum_{j \in J_{nk}} z_{ijk} n_{jkt} + \sum_{j \in J_{sk}} u_{ijkt} + \sum_{k' \in K \setminus \{k\}} \sum_{j \in J_{ekk't}} v_{ijkk't}(e_{jkk't}) - \sum_{k' \in K \setminus \{k\}} \sum_{j \in J_{ek'kt}} w_{ijkk't}(e_{jk'kt}) + \\
&\qquad - \sum_{j \in J_{xkt-1}} w_{ijkt-1}(x_{jkt-1}) = B_{ikt} - B''_{ik}, i \in I, k \in K, t \in \{\tau\}; \\
&\mathbf{u}_{jkt} \in U_{ik}(s_{jkt}),\ j \in J_{sk}, k \in K, t \in T; \\
&\mathbf{z}_{jk} \in Z_{jk},\ j \in J_{nk}, k \in K.
\end{aligned} \tag{4}$$

Переменные модели неотрицательны:

$$\begin{aligned}
&x_{jkt} \geqslant 0,\ j \in J_{xkt}, k \in K, t \in T; \\
&n_{jkt} \geqslant 0,\ j \in J_{nk}, k \in K, t \in T; \\
&s_{jkt} \geqslant 0,\ j \in J_{sk}, k \in K, t \in T; \\
&e_{jkk't} \geqslant 0, j \in J_{ekk't}, k \in K, k' \in K \setminus \{k\}, t \in T.
\end{aligned} \tag{5}$$

Модель экономической системы состоит из соотношений (1)...(5). Положим, что в ней:

a) существует хотя бы один оптимум по Парето;

b) среди ненасущных потребностей имеются ненасыщенные;

c) все обмены осуществляются без трансакционных издержек, т.е. $v_{ijkk't}(e_{jkk't}) = w_{ijk'kt}(e_{jk'kt})$;

d) в $J_{ekk't}$, $k \in K$, $k' \in K \setminus \{k\}$, $t \in T$ содержатся (возможно, наряду с другими) обмены любых двух благ одно на другое в любой пропорции.

Если при $e_{jkk't} = 0\ \forall\ j \in J_{ekk't}$, $k \in K$, $k' \in K \setminus \{k\}$, $t \in T$ для любого из альтернативных векторов множителей Лагранжа ограничений по балансам благ $\mathbf{p} = (p_{ikt})$, где $\{i, i'\} \subseteq I$, имеет место

$$p_{ikt} \,/\, p_{i'kt} \neq p_{ik't} \,/\, p_{i'k't} \tag{6}$$

(*условие осуществимости обмена*), то описываемое моделью распределение благ неоптимально по Парето: условие Куна-Таккера в этом случае не выполнено. В этом состоянии может произойти обмен, вследствие которого система перейдёт в новое состояние — возможно, оптимальное по Парето. Поскольку каждый обмен приводит к увеличению уровня удовлетворения хотя бы одной потребности и ни один хозяйствующий субъект не допускает снижения уровня удовлетворения ни одной из своих потребностей, в силу услоия (а) любая последовательность обменов (возможно, бесконечная) имеет предел — оптимум по Парето.

Вывод. Предположения (a...d) гарантируют, что в модели M существует множество предельных точек последовательности обменов. Оно представляет собой множество оптимумов по Парето модели M при условиях (a)...(d). В предельных точках оценки одного и того же блага одинаковы для всех хозяйствующих субъектов, т.е. образуется общая для всех хозяйствующих субъектов *стоимость* благ.

Замечание. Когда оптимум по Парето достигнут, все обмены уже совершены — не обязательно в пропорциях, соответствующих оптимальным по Парето множителям Лагранжа. Налицо различие по величине и по условиям существования между ценой, характеризующей *обмен*, и стоимостью — атрибутом *блага*. Стоимость существует в оптимуме по Парето, а цена, напротив, в оптимуме по Парето не существует, т.к. мотивация к обмену в нём отсутствует.

Пусть $\mathbf{l} = (l_j)$; $\mathbf{p} = (p_i)$; $\mathbf{A} = (a_{ij})$. Абстрактная *балансовая система* представляет собой пару взаимно двойственных однородных систем линейных уравнений:

$$\Phi = \begin{cases} \sum\limits_{j \in J} a_{ij}\, l_j = 0,\ i \in I; \\ \sum\limits_{i \in I} a_{ij}\, p_i = 0,\ j \in J. \end{cases} \qquad (7)$$

Выбрав в $\mathbf{A}$ некоторый базисный минор, рассмотрим квадратную матрицу $\overline{\mathbf{A}}$, состоящую из элементов $\bar{a}_{ij}$, образованных по правилу

$$\begin{aligned} \bar{a}_{ij} &= a_{ij},\ i \in \overline{I}, j \in \overline{J}; \\ \bar{a}_{ij} &= \sum_k a_{ik}\, l_k,\ j \notin \overline{J}, k \in J \setminus \overline{J}; \\ \bar{a}_{ij} &= \sum_k a_{kj}\, p_k,\ i \notin \overline{I}, k \in I \setminus \overline{I}, \end{aligned} \qquad (8)$$

где $\overline{I}$ и $\overline{J}$ — множества соответственно строк и столбцов, вошедших в выбранный базисный минор. Эта матрица отвечает условиям следующей теоремы, доказанной в [5]. Пусть $\mathbf{V}$ — произвольная невырожденная матрица порядка $n \times n$, w_{ij} — элемент i-й строки и j-го столбца матрицы $\mathbf{W} = \mathbf{V}^{-1}$, $\mathbf{w}_j = (w_{ij})$, матрица $\mathbf{Y}$ порядка $n \times n$ имеет ранг $n - 1$, вектор $\mathbf{p}^*$ — любое нетривиальное решение системы уравнений $\mathbf{Yp} = \mathbf{0}$, p_i — элемент i-й строки вектора $\mathbf{p}$. Тогда если j-я строка матрицы $\mathbf{V}$ представляет собой линейную комбинацию каких-либо других строк $\mathbf{V}$, то $\lim\limits_{\mathbf{V} \to \mathbf{Y}} \mathbf{w}_j = c\mathbf{p}^*$.

Обозначим модель (1)...(5) символом M. Коэффициенты её функциональной матрицы (прил. 4) func(M, $\mathbf{x}^*$), где $\mathbf{x}^*$ — один из оптимумов по Парето, характеризуют изменение значений ограничений или целевых функций при малом изменении переменных. Функциональная матрица модели M представляет собой балансовую систему. Множество векторов $\boldsymbol{\lambda}^*$ множителей Лагранжа в точке $\mathbf{x}^*$ можно определить, решив систему уравнений $\langle \boldsymbol{\lambda}^*, \mathrm{func}(M, \mathbf{x}^*) \rangle = \mathbf{0}$.

Выберем в func(M, $\mathbf{x}^*$) базисный минор таким образом, чтобы в него не вошла та целевая функция, множитель Лагранжа которой выбран в качестве нормы вектора множителей Лагранжа, и рассмотрим матрицу

$$\mathbf{R} = \left(\begin{array}{c|c} a_{kj} & \sum\limits_{j \in J^b} b_j a_{kj} \\ \hline a_{ij} & \sum\limits_{j \in J^b} b_j a_{ij} \\ \hline \sum\limits_{k \in \Omega'_r} \tilde{\lambda}_k^* a_{kj} + \sum\limits_{i \in \Omega''_r} \tilde{\lambda}_i^* a_{ij} & \sum\limits_{j \in J^b} b_j \left(\sum\limits_{k \in \Omega'_r} \tilde{\lambda}_k^* a_{kj} + \sum\limits_{i \in \Omega''_r} \tilde{\lambda}_i^* a_{ij} \right) \end{array} \right), \qquad (9)$$

где a_{ij} и a_{kj} — коэффициенты матрицы func(M, $\mathbf{x}^*$), Ω'_r, Ω''_r и Ω_c — множества вошедших в базисный минор строк целевых функций, строк ограничений и столбцов матрицы func(M, $\mathbf{x}^*$), $\tilde{\lambda}_k^*$, $\tilde{\lambda}_i^*$ — нормированные множители Лагранжа, b_j — некоторый произвольный градиент изменения свободного члена ограничения j. Для матрицы $\mathbf{R}$ (точнее, для тех её столбцов, которые входят не во все базисные миноры) выполняются условия сформулированной выше теоремы. Следовательно, строки матрицы $\mathbf{V}^{-1}$ — такой, что $\mathbf{V} \to \mathbf{R}$ — отличаются не более чем на бесконечно малую от вектора, пропорционального $(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^* \mid \mathbf{1})$. Коэффициент w_{cr} матрицы $\mathbf{V}^{-1}$ может быть определён из уравнения $\mathbf{R}\,\mathbf{w}_r = \mathbf{i}_r$, где $\mathbf{w}_r = (w_{cr})$. Следовательно, если коэффициенты $\mathbf{V}$ отражают с известной степенью приближения влияние переменных на значение ограничения (целевой функции) модели M в окрестности её оптимума по Парето $\mathbf{x}^*$, то коэффициенты $\mathbf{V}^{-1}$ — наоборот, влияние значений ограничений либо целевых функций на переменные. Коэффициент w_{cr} блока матрицы $\mathbf{V}^{-1}$, строки которого соответствуют технологическим процессам, а столбцы — благам, означает интенсивность технологического процесса c, необходимую для чистого выпуска единичного количества блага r при нулевых чистых затратах остальных.

Матрица $\mathbf{V}$, поскольку она невырождена, допускает чистый выпуск одного блага. Матрица $\mathbf{R}$ описывает ситуацию оптимума по Парето, в которой чистый выпуск невозможен, а возможна только взаимозамена благ. Согласно теореме, пропорция взаимозамены двух благ в **R** — предел соотношения интенсивности любого используемого технологического процесса (следовательно, и полных затрат любого ограниченного блага, т.е. полных общественных издержек производства), обеспечивающей единичный чистый выпуск этих благ в **V**. Этот факт устанавливает прямую связь между материальными процессами в оптимуме по Парето экономической системы и стоимостью.

Вывод. Предел нормированных полных затрат любого ограниченного блага, необходимых для выпуска единичного количества данного блага при технологических возможностях, стремящихся к представленным функциональной матрицей модели *M* в данном оптимуме по Парето, есть стоимость данного блага. Цены, стремясь к стоимости, информируют хозяйствующих субъектов о величине полных издержек производства продукции. Эта информация тем точнее, чем менее состояние экономической системы в момент обмена отличается от оптимального по Парето.

Библиографический список

1. Канторович Л.В. Экономический расчёт наилучшего использования ресурсов. М.: Изд-во АН СССР, 1960.
2. Лурье А.Л. Абстрактная модель оптимизации народнохозяйственного процесса и объективно обусловленные оценки // Экономика и математические методы, т. 2, 1966, вып. 1. — С. 12-30.
3. Немчинов В.С. Эконометрия // Академик В.С. Немчинов: Избранные произведения. М.: Наука, 1967. — Т. 3, С. 327-333.
4. Светлов Н.М. Влияние информационных процессов на предпочтения // Труды научной конференции молодых учёных и специалистов ТСХА 6-8 июня 2000 г. М., 2000. (Рукопись депонирована во ВНИИТЭИАгропром, рег. №152/58 ВС-2000)

5. Светлов Н.М. Технико-экономическая интерпретация объективно обусловленных оценок // Актуальные проблемы повышения экономической эффективности сельскохозяйственного производства: Сборник трудов научной конференции молодых ученых и специалистов экономического факультета ТСХА 25 июня 1996 г. М., 1996.
6. Edgeworth F.Y. Mathematical Psychics. L., 1981.

Приложения

1. Математические обозначения

$\mathbf{a} = (a_i)$ — вектор **a**, состоящий из компонентов a_i.

$(\mathbf{a} \mid \mathbf{b})$ — слияние (конкатенация) векторов **a** и **b**.

$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ — скалярное произведение векторов **a** и **b**.

$\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ — все компоненты матрицы **A** стремятся к соответствующим компонентам матрицы **B**, причём **A** остаётся невырожденной.

$A \subseteq B$ — множество A содержится в B или совпадает с ним.

func(Φ, **x***) — см. прил. 4.

2. Взаимность задач математического программирования

Пусть $\mathbf{x}^*$ — оптимум ЗМП вида

$$\begin{cases} \max\limits_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}); \\ \mathbf{q}(\mathbf{x}) \leqslant \mathbf{0}, \end{cases} \qquad (10)$$

где $Z = f(\mathbf{x})$, ограничение n связано, $\mathbf{p}^* = p_i^*$ — оптимальный вектор множителей Лагранжа задачи (10). Тогда задача

$$\begin{cases} \min\limits_{\mathbf{x}} q_n(\mathbf{x}); \\ \mathbf{q}'(\mathbf{x}) \leqslant \mathbf{0}, \end{cases} \qquad (11)$$

где $\mathbf{q}'(\mathbf{x})$ получен из $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ заменой $q_n(\mathbf{x})$ на $(-f(\mathbf{x}) + Z)$, именуемая *взаимной* по отношению к (10), имеет то же самое оптимальное решение $\mathbf{x}^*$, причём оптимальный множитель Лагранжа ограничения i равен p_i^* / p_n^* [2]. Это утверждение известно под названием теоремы взаимности в математическом программировании.

3. Функция Лагранжа и условия Куна-Таккера для ЗВП

Пусть $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ — дифференцируемые вектор-функции векторного аргумента, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)$ — вектор того же порядка, что и $\mathbf{q}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_k)$ и $\mathbf{z}$ — векторы того же порядка, что и $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Функцией Лагранжа задачи

$$\Phi = \begin{cases} \max\limits_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}); \\ \mathbf{q}(\mathbf{x}) \leqslant \mathbf{0} \end{cases} \qquad (12)$$

называется функция $\langle -\boldsymbol{\mu}, \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{z} \rangle + \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{q}(\mathbf{x}) \rangle$ [4].

Точкой Куна-Таккера задачи (12) называется кортеж $(\mathbf{z}, \mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$, для которого выполняются условия Куна-Таккера:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x_j}(\mathbf{z}, \mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) = 0, \\ &\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(\mathbf{z}, \mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) \geqslant 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \mu_k}(\mathbf{z}, \mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) \geqslant 0, \\ &\lambda_i^* \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(\mathbf{z}, \mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) = 0, \quad \mu_k^* \frac{\partial L}{\partial \mu_k}(\mathbf{z}, \mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) = 0, \\ &i \in I, \quad j \in J, \quad k \in K, \end{aligned} \qquad (13)$$

где I — множество индексов компонентов вектор-функции $\mathbf{q}(\mathbf{x})$, J — множество индексов компонентов вектора $\mathbf{x}$, K — множество индексов компонентов вектор-функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Множителями Лагранжа задачи (12) называются величины λ_i и μ_k.

Из прил. 2 следует, что экономическая интерпретация таких множителей Лагранжа аналогична интерпретации множителей Лагранжа ЗМП: в состоянии оптимума по Парето они имеют смысл объективно обусловленных оценок благ или потребностей.

4. Понятие функциональной матрицы ЗВП

Функциональной матрицей ЗВП

$$\Phi = \begin{cases} \max \mathbf{f}(\mathbf{x}); \\ \mathbf{q}(\mathbf{x}) \leqslant \mathbf{0} \end{cases} \qquad (14)$$

в точке $\mathbf{x}^*$ некоторого её оптимума по Парето назовём функциональную матрицу отношения

$$\Phi^* = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{z}^*; \\ \mathbf{q}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \end{cases} \qquad (15)$$

в точке $\mathbf{x}^*$, где $\mathbf{z}^* = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$; $\mathbf{q}^*(\mathbf{x})$ — вектор-функция, состоящая из тех компонентов вектор-функции $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = (q_i(\mathbf{x}))$, для которых имеет место $q_i(\mathbf{x}^*) = 0$. Обозначим множество индексов таких компонентов символом I^z.

Для функциональной матрицы задачи Φ в точке $\mathbf{x}^*$ введём обозначение $\mathrm{func}(\Phi, \mathbf{x}^*)$.

По определению

$$\mathrm{func}(\Phi, \mathbf{x}^*) = \begin{pmatrix} a_{kj} \\ \ldots\ldots \\ a_{ij} \end{pmatrix}, \qquad (16)$$

где $a_{kj} = \dfrac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial x_j}$, $a_{ij} = \dfrac{\partial q_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$, полагая $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_k(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x} = (x_j)$, $i \in I^z$.

Пусть $(\mathbf{z}^*, \mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ — точка Куна-Таккера задачи (14). Согласно условиям Куна-Таккера для задачи (14), имеет место равенство $(\lambda_i^* \mid \mu_k^*) \cdot \mathrm{func}(\Phi, \mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$, где $i \in I^z$.